EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

29e JAARGANG 1953/54

I

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (*f* 8,00) zijn ingetekend, betalen *f* 6,75.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van Wimecos storten hun contributie, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in *f* 6,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op Euclides begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107III, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Zwolse weg 371, Apeldoorn, tel. 330 (Wenum, K 6762). Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

INHOUD.

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

29e JAARGANG 1953/54

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

DIDACTISCHE REVUE

De bedoeling van deze rubriek is om uit de beschikbare, meest buitenlandse tijdschriften een overzicht te geven van die onderwerpen, waarin de Nederlandse wiskunde-leraar geacht kan worden belang te stellen in verband met het door hem te geven onderwijs. Met het oog hierop zullen we veelal kunnen volstaan met het vermelden van auteur en titel. Soms echter geven we door een kort citaat iets van de inhoud aan. Een andere maal spreken we een waarderingsoordeel uit. Deze eerste keer zullen we iets uitvoeriger zijn dan ons voor later nodig lijkt, om de geest der tijdschriften goed te laten uitkomen.

Alle hier te noemen tijdschriften zijn opgenomen in de „*Lees-portefeuille-Wimecos*", waaraan ook leden van *Liwenagel* kunnen deelnemen.

Men wende zich tot G. J. J. Boost, Parklaan 107a, Roosendaal (N.Br.).

I. *The Mathematical Gazette*, vol. XXXVII, no. 320, May 1953; edited for the Mathematical Association by T. A. A. Broadbent.

Inhoud. 1. De aflevering begint met een verslag van de „Annual General Meeting" of the Math. Ass. te Sheffield in April 1953 en het Report of the Council for the year 1952. We leren eruit, dat Prof. Broadbent voor het jaar 1953 tot voorzitter van de M.A. is gekozen en dat ter vergadering o.a. inleidingen gehouden werden over: „School Mathematics today and tomorrow", „Infinity", „From Primary School to Secondary School" en „Theory of Games". Gedurende de vergadering waren er diverse tentoonstellingen: „a Publisher Exhibition, an Exhibition of Teaching Aids and an Exhibition of Calculating Machines".

De Association telt ongeveer 2500 leden en heeft een bedrag aan jaarlijkse inkomsten van ruim £ 3800. Ze geeft de Gazette uit en beheert een bibliotheek. Er is een Teaching Committee, dat op het punt staat een rapport te publiceren over „the Teaching of Higher Geometry in Schools"; er is een afzonderlijk Problem Bureau.

2. A property of linear cyclic transformations, by J. H. Cadwell.

3. Reciprocal Nomograms, by C. V. Gregg.

4. The solution of algebraic and transcendental equations by iteration, by E. H. Bateman.

5. Rod, pole and perch, by „Peter Simple", kostelijke humor over het stelsel der engelse maten.

6. The calculation of large primes, by E. M. Wright.

De auteur herinnert eraan, dat ongeveer 75 jaar $2^{127} - 1$ het grootste getal is geweest, waarvan bewezen was dat het een priemgetal was. In 1951 hebben Miller en Wheeler het priemkarakter aangetoond van tal van groteregetallen, o.a. van $180\,(2^{127} - 1)^2 + 1$, een getal van 79 cijfers.

Wright geeft met elementaire middelen een uitbreiding van de methode van Miller en Wheeler voor het onderzoek, of $kp^3 + 1$ (p priem en > 2) priem is.

7. On commutative matrices, by M. F. Egan en R. E. Ingram.

8. The approach to algebra, by E. M. Renwich.

Er wordt gewezen op de didactische moeilijkheden, waarmee men te kampen heeft bij het onderwijs aan jonge leerlingen, wie het eigenlijke doel van het wiskunde-onderwijs nog niet veel zegt. We moeten rekening houden met het feit, dat „in the child the sense of failure leads to frustration and distaste for the artificial culture of the schools". Er is in het onderwijs een accent-verschuiving van leerstof naar leerling waar te nemen. „This shift in emphasis, which makes the pupil's enjoyment of success one of the main aims in early lessons, must be allowed for in any readjustement of topics to be taught".

De auteur onderzoekt nu „various types of preparatory activity, in order to discover, if possible, which of them most effectively subserved the main aim".

9. Euclidean Geometry and the Rigid Motion Group, by R. L. Goodstein.

Dit artikel is van belang voor alle Nederlandse lezers, die zich voor het aanvangsonderwijs in de planimetrie interesseren; het is geschreven contra een artikel van prof. M. G. Littlewood, Dec. 1950.

Klein's definitie van meetkunde in het Erlanger Program van 1872 leidt ertoe de euclidische meetkunde te karakteriseren als de groep van projectieve transformaties, die een willekeurig gekozen involutie op de oneindig verre rechte invariant laten, en die overeenstemt met de „rigid motion" groep, die de afstand van twee punten invariant laat. „What however is the relationship between the rigid motion group of transformations and the actual motion of a rigid body?" Het antwoord van de auteur luidt, „that there is no logical relationship whatever". Hij ontwerpt daartoe een model van de euclidische meetkunde, waarin twee congruente

driehoeken niet door eenzelfde stoffelijk lichaam kunnen worden bedekt.

„By all means let children approach geometry by way of geometrical drawing and the movement of paper triangles, but do not confuse the traveller's coach with his distinction. However much we may use the language of the physical world, geometry is a self-contained logical structure, not on empirical science, neither validated nor invalidated by any natural phenomenon, and owing nothing to the existence of physical bodies or the possibility of motion but the accident of its history". [1])

10. In „the Mathematical Notes" spreekt Ross over de naam van het „Nimspel". Hij acht het waarschijnlijk, dat „nim" een woord is afkomstig van het Duitse „nimm" van „nehmen". Hij licht toe, dat de naam „Fan-fan", die o.a. volgens Ahrens aan dit spel in China gegeven zou zijn, niet op het nim-spel betrekking heeft. Andere „notes" bespreken b.v. „Simson's line and its envelope", „Proofs in elementary geometry" en een benadering van tang θ voor kleine θ.

Dertig bladzijden „Reviews" besluiten deze aflevering. Men vindt hierin van zeer deskundige zijde uitvoerige en grondige recensies zowel van boeken die tot de „vaklitteratuur" behoren, als van boeken die enkel „didactische" betekenis hebben.

II. *The Mathematics Teacher*, Official Journal of the National Council of Teachers of Mathematics, Washington; Volume XLVI, May 1953, Number 5.

Inhoud. 1. In „Fewer Teachers to Meet Greater Demand" constateert de auteur R. C. Maul een achteruitgang van het aantal „college graduates" in de jaren na 1950 en een absolute en relatieve achteruitgang van de „graduates prepared to teach mathematics". Statistisch onderzoek doet hem vrezen, dat de verhouding tussen vraag en aanbod in de naaste toekomst nog ongunstiger zal worden.

2. „Insurance looks ahead" is een tafelspeech van E. J. Faulkner op de Kerstvergadering 1952 van de National Council of Teachers of Mathematics, waarin hij de continue groei in betekenis van het verzekeringswezen nagaat; „ . . . in the business of insurance we need more and more men and women who can look at a balance sheet or a page of statistics without fear or confusion. The cry is not for the PH. D. who can navigate unerringly through the mathematical stratosphere, but rather for the man or woman who is well grounded in arithmetic, algebra and business statistics".

[1]) Goodstein geeft een rectificatie op zijn beweringen in no. 321 van de Gazette.

3. James F. Ulrich bepleit in „the Case for the Syllogism in Plane Geometry", dat expliciet in het meetkunde-onderwijs de structuur en de betekenis der syllogismen aan de leerlingen zal worden onderwezen. „It is the contention of the writer that the teacher should frequently point out just where and how the syllogism occurs in the direct proof. To do this, the syllogism itself and its fundamental properties can be introduced and explained; then the all-important transition from the syllogism to the geometric proof should be explicitly demonstrated. The difference between a geometric proof and a syllogistic proof is merely one of form, but that difference should be thoroughly discussed".

4. „High School Algebra for Bright Students" (M. L. Hartung) bevat de klacht, dat de belangen van de groep der begaafde leerlingen, welke groep de potentiële leiders van de volgende generatie omvat, te zeer worden verwaarloosd. In het artikel „Let's do something for the gifted in mathematics" wordt dieper op deze materie ingegaan en ontwikkelt de auteur een program, dat didactisch voor het gehele onderwijs van betekenis is.

5. Een lijst van 32 titels, voorkomend in het artikel „Using Recreational Math. Materials in the Classroom" (L. G. Brandes) kan ook voor Nederlandse lezers van waarde blijken.

6. W. G. Ransom geeft in „History of the Association of Teachers of Mathematics in New-England, 1903—1953" een historische overzicht van deze organisatie.

7. E. J. Berger verzorgt de rubriek „Devices for a mathematics laboratory", Ph. J. Jones de rubriek „Mathematical Miscellaner". Men vindt er een vouwprobleem voor een regelmatige vijfster (de nauwkeurigheid van de uitkomst kan worden opgevoerd door de maten 10½ bij 8 die in de tekst voorkomen, te vervangen door 13 bij 10; — *Wk*), een benaderingsconstructie voor de trisectie van de hoek en het „Napoleontisch probleem" uit de passermeetkunde.

8. In „Research in Mathematics Education" bespreekt J. J. Kinsella „The understanding of arithmetic processes and concepts by teachers of arithmetic" (New York, 1952, J. S. Orleans) met ontnuchterende conclusies t.a.v. het peil van het wiskundig inzicht van Amerikaanse docenten in de wiskunde.

9. In „Notes on the history of mathematics" geeft Sanford een overzicht van de „Pratique de Géometrie . . ." van Sébastien le Clerc.

Van de overige rubrieken noemen we nog: „What is going on in your school?", „Applications", „Aids to teaching" en „Book Reviews".

Een uitvoerig program van het vijfdaags congres van wiskundeleraren, dat in Augustus 1953 te Kalamazoo (Michigan) gehouden wordt, wijst op de grote belangstelling van de Amerikaanse leraren voor de didactiek van hun vak.

III. *Elemente der Mathematik*; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik, und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts; Organ für den Verein Schweizerischen Mathematiklehrer; Band VIII, nr. 3, Mai 1953.

Het tijdschrift neemt op: „Forschungsberichte", „Abhandlungen" uit het gebied van de zuivere en toegepaste wiskunde en uit de theoretische natuurkunde en uit de geschiedenis der wiskunde, waarbij in het bijzonder gelet wordt op de betekenis, die de artikelen voor het onderwijs zullen hebben, „Kleine Mitteilungen", „Aufgaben", „Berichte" (uit verenigingsleven; leerplannen, enz.) en een „Literaturüberschau".

Inhoud van dit nummer o.m.:

1. M. Jeger, Topologische Gesichtspunkte in der Nomographie, een vervolgartikel, aansluitend bij publicaties van Blaschke en Thomsen, Blaschke en Bol, en Graf-Sauer.

2. H. Jecklin, Trigonometrische Mittelwerte.

Is $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ en φ de inverse functie van de monotone functie $f(x)$, dan wordt het quasi-arithmetische gemiddelde M van de n waarden van x bepaald door:

$$M = \varphi\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right\}.$$

De auteur beschouwt ook:

$$S = \text{arc sin}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin x_i\right\}, \qquad \text{(Sinusmittel)}$$

$$T = \text{arc } tg\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} tg\ x_i\right\}, \qquad \text{(Tangensmittel)}$$

enz.

Van de diverse gemiddelden wordt in opvolgende intervallen de orde-relatie onderzocht.

3. E. Roth-Desmeules toont in „Geometrische Darstellung der Dimensionen physikalischer Gröszen und ihre Anwendung" aan: „die Dimensionen der physikalischen Grössen bilden einen n-dimensionalen affinen Vektorraum V_n über dem Körper der rationalen

Zahlen". „Die Festlegung eines Dimensionssystems zum Aufbau eines Einheitensystems kommt darauf hinaus im affinen Raume der Dimensionen ein Koördinatensystem auszuwählen. Damit ergibt sich gleichzeitig ein Überblick über die Mannigfaltigkeit der möglichen Systeme".

4. R. Lauffer bestudeert in „Ein Satz der elementaren Geometrie" de formule van Heron:

$$16 f^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4).$$

5. G. Bilger, A propos du pentagone.

6. Fr. Steiger, Zu einer Frage über Mengen von Punkten ganzzahliger Entfernung.

Onder de „Neue Aufgaben" treffen we er één aan van H. Bremekamp, Delft, terwijl in de Literaturüberschau twee uitgaven worden besproken, die op het contact met ons land wijzen: Schwerdtfegers's Introduction to Linear Algebra and the Theory of Matrices, en P. Wijdenes' Vlakke Meetkunde.

IV*a*. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*, Organ des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, 6 Band, 1 Heft 1953/54, Bonn/Rhein, Frankfurt/M.

Inhoud. Dit nummer bevat een 16-tal bijdragen met een gezamenlijke lengte van 96 kolommen uit de biologie, de natuurkunde, de scheikunde en de wiskunde. We noemen:

1. H. Kimmel, Biologische Probleme in der geistigen Auseinandersetzung zwischen Ost und West.

2. P. Anthes, Die Schulvivaristik im Lichte pädagogischer Theorien.

3. B. Steffer, Die Entwicklung des anorganischen Naturbildes im 19. und 20. Jahrhundert; 5. Teil: die Kernphysik.

4. W. Böhme, Ein dringendes Erfordernis: Lebensnahe Mathematik-Aufgaben.

De auteur constateert, dat ondanks het streven om in moderne vraagstukkenverzamelingen problemen uit het praktische leven op te nemen, het resultaat teleurstelt, omdat „viele der praktischen Aufgaben doch eigentlich recht, unpraktischer Natur sind". Hij hekelt tal van opgaven die ook in Nederland sinds lang aan de kaak werden gesteld en zegt dan: „Vielfach kommt es auch vor, dasz zwar praktisch sinnvolle Aufgaben gestellt werden, dasz aber der vorgeschriebene Lösungsweg unpraktisch ist". Dit is b.v. het geval, als men onder het hoofd „Cosinusregel" grootte en richting van

de resultante van twee gegeven krachten te bepalen geeft. De auteur wijst op tal van gebieden, waar het de leraar nog steeds aan praktische, zinvolle opgaven ter vervanging van „Rätselaufgaben" ontbreekt. Het aanvullen van de lacune gaat de krachten van den enkeling te boven. Vandaar zijn voorstel: „Jeder, der eine oder mehrere originellen und in jeder Hinsicht für Schulzwecke geeigneten Aufgaben bereit hat, stellt diese einer zentralen Stelle zur Verfügung .... Diese zentrale Stelle sammelt, prüft and wählt Brauchbares aus für eine nach formal-mathematischen Gebiete gegliederte Aufgabensammlung für die Hand des Lehrers".

Uit de rubriek „Aus der Forschung" vermelden we:

5. W. Flörke, Raumgitterstruktur, physikalisches und chemisches Verhalten der Kristalle.

6. H. Hermann, Der Mesonzerfall als Beispiel zum relativistischen Uhrenparadoxon.

7. I. Paasche, Ein zahlentheoretisch-logarithmischer „Rechenstab".

De auteur bespreekt een stelling van Moessner, die een uitbreiding betekent van de bekende eigenschap, dat men door in de rij der natuurlijke getallen alle getallen met rangnummer $2n$ te schrappen en vervolgens partiëel te gaan sommeren, de getallen n^2 krijgt. Zo krijgt men de rij der vierdemachten volgens het volgend procédé: schrap in de rij der natuurlijke getallen de getallen met rangnummer $4n$ en sommeer partiëel; schrap in de som-rij de getallen met rangnummer $3n$ en sommeer partiëel; schrap in de nieuwe som-rij de getallen met rangnummer $2n$ en sommeer weer partiëel.

1.	2.	3.	**4.**	5.	6	7	**8**	9	10	11	**12**	13...	
1	3	**6**		11	17	**24**		33	43	**54**		67...	
1	**4**			15	**32**			65	**108**			175...	
1				16				81				256...	

Ook door andere voorbeelden toont de auteur aan dat „das Moessnerverfahren und seine Verallgemeinerung wie ein zahlentheoretisch-logarithmischer Rechenstab wirkt, indem er Summen in Produkte, Differenzen in Quotienten und Produkte in Potenzen verwandelt. Es hat den Anschein, als ob dieses Prinzip des Moessnerschen Streichungs- und Summationsverfahrens beim Bau von Rechenmaschinen fruchtbar gemacht werden könnte".

Uit de rubriek „Aus der Schulpraxis – für die Schulpraxis" noemen we nog:

8. J. Lutz, Tangenten- und Polarenprobleme in der Analytischen Geometrie.

9. R. Laemmel, Das Cartesische Blatt als Lösung einer Planimetrischen Aufgabe.

10. J. Hogrebe, Gedanken zu dem Beitrag „die mathematische Klassenarbeiten – der mathem. Aufsatz".

Er is een rubriek: „Bekannte und unbekannte Aufgaben und Lösungen früherer Aufgaben" en een „Bücher- und Zeitschriftenschau" van 10 kolommen.

IV*b*. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*, 6 Band, 2 Heft, 1953/54, Juni 1953;

Inhoud. In de afdeling „Aus der Forschung" behandelt W. Benz de „Akustik eines Schallabgebenden, mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden, Flugkörpers" en S. Jansz „Dopplereffekt und Photone".

In de afdeling „Aus der Schulpraxis – Für die Schulpraxis" bespreekt F. Peter uitbreidingen van de bekende stelling, dat de zwaartepunten van gelijkzijdige driehoeken, die buiten- of binnenwaarts op de zijden van een willekeurige driehoek worden beschreven, de hoekpunten zijn van een gelijkzijdige driehoek. J. Stahl beschouwt in „Pi und der Goldene Schnitt" een aantal interessante benaderingsformules, o.a. deze, dat de middellijn van een cirkel verlengd met a_{10} tot op $\frac{1}{666000}$ gelijk is aan de lengte van een boog van 150°.

In „die Graphische Darstellung im biologischen Unterricht" geeft H. Schmidt van diverse technieken (Punktgraphik, Liniengraphik, Streifengraphik, Tabellenstreifengraphik, Quadrat- und Kreisgraphik, Würfelgraphik, Feldengraphik, Sektorengraphik, Kurvengraphik, Polarkoordinatengraphik, Variationsstatistische Graphik, Netztafeln, Verteilungsschemen, Kartogrammen) voorbeelden uit het biologie-onderwijs, terwijl verkeerd gebruik en misbruik van enkele der technieken aan de kaak wordt gesteld. „Würfel-, Quadrat- und Kreisgraphik sind wegen ihrer Nichtanschaulichkeit für den Unterricht abzulehnen."

Belangrijk is onder „Tagungsberichte" het verslag van de Fördervereinstagung in Münster 1953. Het congres duurde 5 dagen en telde meer dan 900 deelnemers. We noemen enkele voordrachten uit de mathematische sektor:

Prof. dr H. Behnke, Der Strukturwandel in der Mathematik im 20. Jahrhundert;

Prof. dr J. Hermes, Der Begriff der Funktion als Grundlage für Mathematik und Logik;

Prof. dr H. Petersson, Was ist additive Zahlentheorie?

Dr G. Kropp, Phasenverschiebung des mathematischen Unterrichtes gegenüber der Hochschule.

Aansluitend op de ideeën van Felix Klein, de Meraner Vorschläge (1905) en de reorganisatie van 1925 in Pruisen wijst dr Kropp erop, dat er opnieuw een vacuum tussen middelbare school en universiteit dreigt. „Es ist bekannt, dasz die Vektorrechnung unüberhörbar an die Pforte des Schulunterrichtes klopft; mit ihr begehrt der Determinantenbegriff Einlasz. Die Kombinatorik gehört ins Schulpensum zurück, zumal sie als finite Disziplin vollständig behandelt werden könnte. Auf ihr ruht die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die mathematische Statistik . . . Die Schule musz heute bemüht sein, die fundamentalen Grundbegriffe der Menge, der Abbildung und des Operators in propädeutischer Weise dem Schüler nahezubringen."

Dr P. Sengenhorst sprak over het beginonderwijs in de planimetrie. Hij wil in de eerste klasse geen bewijzen in de geest van Euclides of Hilbert, maar bepleit de „genetische Methode entsprechend den Forderungen von Felix Klein". „Der Schüler wächst dabei auf organische Weise in die Begriffe hinein, wobei man ihm schon manches an Gedankenarbeit zumuten kann, wenn man alle Überlegungen nicht abstract sondern gegenstandsbezogen am Modell durchführen lässt".

Dr E. Kamke geeft o.a. een historische beschouwing over de „Sicherheit einer mathematischen Erkenntnis".

Prof. dr F. Hohenberg's voordracht over „Darstellende Geometrie als Ausgangspunkt geometrischer Betrachtungen" getuigt van een extreme positieve waardering voor de Beschrijvende Meetkunde als schoolvak.

F. Denk sprak over „Mathematische Erziehung".

Prof. dr K. Strunz sprak over de eenzijdig-wiskundige, over de antimathematicus en over de wiskunde-leraar als opvoeders der jeugd. De leraar moet zich „mit der Stellung der Mathematik in der Gesamtheit der Kultur- und Bildungsgüter befassen. Deswegen sollte er Psychologie treiben und sich mit didaktischen Fragen beschäftigen".

Uit de niet-mathematische voordrachten noemen we in verband met het cosmografieonderwijs: „der Urknall und die Entstehung der chemischen Elemente" van prof. dr E. Bagge.

In aansluiting aan het congres te Münster had een vergadering plaats van de wederopgerichte I.M.U.K. (Internationale Mathematische Unterrichtskommission). Plannen werden voorbereid

voor het Internationale Congres te Amsterdam in 1954.

Onder de oplossingen van „bekende en onbekende opgaven" valt op een oplossing van het vraagstuk: „Ordnet man alle echten, gehobenen Brüche, deren Nenner kleiner als n ist, der Gröszenach, so ist der Zähler der formal gebildeten Differenz von zwei benachbarten Brüche stets gleich 1".

De aflevering sluit met een „Bücher- und Zeitschriftenschau".

V. *a. School Science and Mathematics*, Journal for all Science and Mathematics Teachers, Volume LIII, Whole 466, May 1953.

Inhoud. We geven ter kenschetsing van dit tijdschrift van deze aflevering de volledige inhoudsopgave.

1. M. P. Simmons, Science at Work, a Unit in General Science;
2. J. S. Miller, Remarks on the Conservation of Mass-Energy;
3. W. G. Vinal, The Science Janus;
4. A. Poste, Rome's Contribution to Natural Science;
5. R. Kienholz, Some Techniques of a Conservation Tour;
6. Ch. A. Compton, On the Scientific Method;
7. W. D. Reeve, The Place of Mathematics in Secondary Education.

In dit vervolgartikel bespreekt de auteur „the real reasons for the prestige of mathematics". Hij noemt: the wonder motive, tradition, the systematizing motive, a fine art, contribution to a scientific age. In „modern views" zegt de auteur o.a.: „There is also the aggravated problem of the slow learning students in mathematics. Much has been written about them, but little if anything has been written about what should be done with the slow learning teacher. The students have a right to have teachers who know how to teach and they have also the right to study a kind of mathematics which they not only can understand but can have some joy in learning". De auteur geeft aan wat de wiskunde op de Junior High School en op de Senior High School dient te beogen.

8. J. K. Anthony, Regions of Vulcanism;
9. A. A. Himmel, Visual Aids for Teaching Chemical Industrial Processes;
10. A. R. Clish, One Hundred Eighty-Fifth Meeting of the Eastern Association of Physics Teachers;
11. G. H. Jamisn, Problem Department;
12. Books and Pamphlets Received;
13. Book Reviews.

V. *b School Science and Mathematics,* Volume LIII, Whole 467, June 1953.

Deze aflevering bevat maar weinig wiskunde.

In ,,Linger to Learn" gaat L. H. Lange uit van een simpel vraagstuk:

,,Al and Betty work evenings. Al is off duty every ninth evening, Betty every sixth. Al is off duty this evening and Betty is off duty tomorrow evening.

When, for the first time, if ever, will they be off duty the same evening?"

De auteur gaat verschillende oplossingsmethoden na, met inbegrip van de methode der onbepaalde vergelijkingen en die der congruenties. De auteur merkt op: ,,that all too often we hurry on after we have solved some particular mathematical problem, or have read some one's else solution, and fail to make the most of the learning situation that presents itself".

In ,,Economy in Learning" geeft W. A. Ownbey enige tabellen, waarin de zijden van een driehoek hele getallen tot lengte hebben, terwijl één der hoeken 60° of 120°. Er zijn tot slot de afdelingen: ,,Problem Department" en ,,Book Reviews".

VI. *Paedagogische Studiën,* Maandblad voor Onderwijs en Opvoeding, XXX, 7 en 8, Juli/Aug 1953, Wolters; Groningen.

Het artikel ,,Differentiatie bij het Middelbaar Onderwijs" van W. de Lange is voor alle leraren van belang. Men vindt er een uiteenzetting van de wijze, waarop men op de G.H.B.S. ,,Johan de Witt" in Scheveningen het doubleren althans in de lagere klassen tracht te beperken door voor een viertal vakkengroepen het onderwijs te geven in snel tempo, in normaal tempo, in langzaam tempo, met mogelijkheden om van tijd tot tijd leerlingen naar een groep met ander tempo te laten overgaan.

Wansink.

EEN ONDERZOEK NAAR DE OVERLADING VAN HET PROGRAMMA VOOR DE WISKUNDE BIJ HET VOORBEREIDEND HOGER- EN MIDDELBAAR ONDERWIJS

door Dr. L. N. H. Bunt

VOORWOORD

Het hier te beschrijven onderzoek heeft ten doel een bijdrage te leveren tot de kwestie van het al of niet overladen zijn van het programma voor de wiskunde op de middelbare school. Dat deze kwestie nog steeds als actueel wordt beschouwd, moge blijken uit het grote aantal docenten, die hun medewerking aan dit onderzoek verleenden. Aan hen in de eerste plaats breng ik mijn bijzondere dank; dat deze wel verdiend is, zal uit de lezing van het verslag, met name van de paragrafen 7 en 8 daarvan, voldoende duidelijk worden. Mijn dank gaat verder uit naar de staf van de afdeling Didactiek van het Paedagogisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht, waarbij een afzonderlijke vermelding toekomt aan de heer C. Kool, candidaat in de wis- en natuurkunde, voor zijn hulp bij het verwerken van het materiaal en bij het samenstellen van het verslag. Voorts zeg ik een ieder dank, die mij met bijzondere adviezen behulpzaam is geweest.

Het volledige verslag bestaat uit twee gedeelten. Het eerste is een beschrijving van de organisatie van het onderzoek en geeft een samenvatting en globale interpretatie van de resultaten. Het tweede bevat een beschrijving van het werk van elk der secties afzonderlijk, die bij dit onderzoek werden gevormd, voor zover deze betrekking hadden op de algebra of de goniometrie.

Van dit verslag kon slechts een gedeelte worden gepubliceerd. Dit geschiedt in de vorm van No. 5 van de Acta Paedagogica Ultrajectina, waarin wordt opgenomen 1. de bovengenoemde samenvatting, 2. een gedeelte van elk van drie secties, 3. een beknopte aanduiding van de leerstof die in de overige secties is behandeld. Voor het aanbod van de redactie van Euclides om de onder 1. en 2. genoemde onderdelen in dit tijdschrift op te nemen, ben ik zeer erkentelijk. De volledige verslagen van de drie genoemde en van elk der overige secties zullen door belangstellenden op het Paedagogisch Instituut kunnen worden geraadpleegd.

In de verslagen van de secties worden de opgegeven proefwerken vermeld. Wellicht zullen sommige lezers één of meer van deze proefwerken of gedeelten er van aan hun leerlingen willen voorleggen. Ik zal het in die gevallen zeer op prijs stellen de resultaten te mogen vernemen.

L. N. H. Bunt

I

INRICHTING VAN HET ONDERZOEK EN SAMENVATTING VAN DE RESULTATEN.

1. In 1949 werden door de didactische afdeling van het Paedagogisch Instituut de resultaten gepubliceerd van een onderzoek naar de heersende gebruiken aangaande de keuze van de leerstof voor de wiskunde en naar de meningen die daarover in het lerarencorps worden aangetroffen. Door middel van een enquête werden gegevens verzameld, betrekking hebbend op de omvang van datgene, wat de wiskundedocenten bij hun onderwijs gaarne zouden willen behandelen. Enkele van de vragen, welke bij die gelegenheid werden gesteld, hadden ten doel een uitspraak van de docenten te verkrijgen over de mate, waarin deze de behandeling van elk der door hen als wenselijk aangegeven onderwerpen tevens als mogelijk beschouwden. De antwoorden die op de laatstgenoemde vragen werden gegeven, leidden tot de conclusie, dat het wiskundeprogramma in zijn huidige vorm overladen is.

Hierbij dient onder „wiskundeprogramma" te worden verstaan het programma dat wiskundeleraren zich plegen te stellen, níet het geheel van aanwijzingen dat gevormd wordt door Koninklijke Besluiten aangaande school- of eindexamenprogramma's. Deze besluiten moeten zich er wel toe bepalen de programma's slechts in grote lijnen te formuleren, ten einde het onderwijs niet te veel aan banden te leggen. Wil men dus niet alleen maar vagelijk spreken van overlading van het programma, maar ook duidelijk maken wat hiermee bedoeld wordt, dan is het allereerst nodig te weten, hoe de leraren zich dit programma voorstellen. Nu kan de beantwoording van een vragenlijst hierover, ook al is deze nog zo gedetailleerd samengesteld, niet meer dan een globaal beeld geven van het programma, dat in de les wordt behandeld. Een duidelijker beeld zal hiervan kunnen worden verkregen wanneer een voldoend aantal docenten een verslag van hun lessen maakt. — Dit was de eerste overweging die mij tot het thans te bespreken onderzoek bracht.

Een tweede overweging was de volgende. In de wiskunde is de waarheid van een stelling in voldoende mate aangetoond zodra daarvoor één bewijs is geleverd. De didactiek van de wiskunde is

echter zelf geen wiskunde, en aan een bewijs van een bewering van didactische aard kan niet dezelfde overtuigingskracht worden toegekend als aan dat van een wiskundige stelling. Wil men dan ook een zo belangrijk verschijnsel als dat van het bestaan van overlading van het wiskundeprogramma duidelijk in het licht stellen, dan kan het geen kwaad, op meer dan één manier aannemelijk te maken dat dit verschijnsel zich voordoet. Wanneer deze manieren dan bovendien zo gekozen worden, dat daarbij verschillende methoden worden toegepast, wordt hun gezamenlijke bewijskracht versterkt. De bovengenoemde enquête was geheel van statistische aard. Hierdoor gaan noodzakelijkerwijs allerlei bijzonderheden verloren en behoudt het resultaat een in vele opzichten vaag karakter. Wanneer hiernaast een methode wordt toegepast welke meer individueel gericht is en toch de eenzijdigheid van het bijzondere geval weet te vermijden, wordt een belangrijke aanvulling verkregen van de gegevens, welke het eerstgenoemde onderzoek opleverde.

2. In een bijeenkomst van een aantal medewerkers, allen leraren in de wiskunde aan een gymnasium, h.b.s. of lyceum, in welke vergadering de voorlopige resultaten van de genoemde enquête werden besproken, werd tot de volgende gedragslijn besloten. Ieder van de aanwezigen doet zo gedetailleerd mogelijk mededeling van wat naar zijn mening behoort tot de onder normale omstandigheden gebruikelijke leerstof voor algebra, meetkunde en goniometrie in de derde klas van de h.b.s. of in de derde en vierde klas van het gymnasium (resp. van een hiermee corresponderende afdeling van het lyceum). Uit deze overzichten wordt een syllabus samengesteld, die vervolgens in een aantal onderdelen van beperkte omvang wordt verdeeld. Van elk dezer onderdelen zal door een sectie proefondervindelijk het aantal lesuren worden vastgesteld, dat voor een bevredigende behandeling nodig is.

Ter nadere toelichting van hetgeen verlangd werd, richtte ik aan de hier genoemde groep medewerkers een schrijven, waaraan het volgende ontleend is:

„. . . Bedoeld wordt niet alleen die leerstof, die U onder normale omstandigheden in deze klas pleegt te behandelen en waarmee U dan misschien op een enigszins bevredigende manier klaar komt, maar ook

a. de eventuele andere stof die naar Uw oordeel in deze klas dient te worden behandeld op grond van examen-, bevorderings- of andere eisen;

b. de eventuele onderwerpen die U tot een hogere klas uitstelt, maar die, met het oog op een goede gang van zaken in de hogere klassen, eigenlijk in de derde klas van de h.b.s. of derde en vierde klas van het gymnasium zouden moeten worden behandeld".

3. Zoals reeds werd opgemerkt, beperkten we ons tot één, resp. twee klassen. Een onderzoek in alle klassen tegelijk zou om organisatorische en technische redenen niet uitvoerbaar zijn geweest; bovendien viel het te betwijfelen of een daarvoor toereikend aantal medewerkers zou kunnen worden gevonden. Om deze redenen werd het onderzoek beperkt tot één klas van de h.b.s. en de twee daarmee vergelijkbare klassen van het gymnasium. De beginklas van de middelbare school kwam voor dit onderzoek niet in de eerste plaats in aanmerking. Zij had als bezwaar, dat in deze klas in de verschillende scholen een grote verscheidenheid van methode heerst, welke het verkrijgen van vergelijkbare en te veralgemenen resultaten zou bemoeilijken, terwijl een tijdelijk meer eenheid doen brengen in deze methode in vele gevallen tot veranderingen van te ingrijpende aard in de gebruikelijke methodiek zou hebben geleid. De hoogste klas bevond zich te veel in de buurt van het eindexamen, dan dat het onderwijs zich hier ongestraft in belangrijke mate zou kunnen laten beïnvloeden. De derde klas van de h.b.s. en de derde en vierde klassen van het gymnasium vertoonden deze bezwaren niet en hadden bovendien door hun centrale ligging het voordeel, dat het onderwijs vertakkingen naar beneden en naar boven heeft: het onderwijs in de lagere klassen vindt hier gedeeltelijk een afsluiting, terwijl dat in de hogere klassen hier een belangrijk deel van zijn grondslagen heeft. Te midden van de vijf-, resp. zesjarige periode van de school nemen de gekozen klassen, wat de leerstof voor de wiskunde aangaat, een belangrijke plaats in, terwijl een groot aantal van de op de school behandelde onderwerpen door de keuze van deze klassen in onze beschouwingen wordt betrokken. Om deze redenen werd het onderzoek in de laatstgenoemde klassen gedaan en beperkte het zich tot deze.

4. Door middel van de mij toegezonden gegevens kon een overzicht worden verkregen van hetgeen op grond van de bovengenoemde overweging als de leerstof voor h.b.s. III en gymnasium III en IV werd beschouwd. Natuurlijk waren er kleine verschillen tussen de opvattingen van de medewerkers, maar een duidelijke meerderheid gaf de stof aan, die beneden wordt opgesomd en die als volgt werd ingedeeld.

Algebra H.B.S.

A. lineaire functie; grafiek hiervan; lineaire ongelijkheden; afhankelijkheid en strijdigheid van lineaire vergelijkingen met twee onbekenden.
B. rekenkundige en meetkundige reeks; oneindig voortlopende meetkundige reeks.
C. vierkantsvergelijkingen; eigenschappen van de wortels; transformatie van vierkantsvergelijkingen; vierkantsvergelijkingen met gemeenschappelijke wortel; ingeklede vierkantsvergelijkingen.
D. kwadratische functies; grafiek hiervan; tekenverloop; ontbinding; uiterste waarden; raaklijn aan parabool; kwadratische ongelijkheden.
E. machten met reëele exponenten; logarithmen; de logarithmische en exponentiële functie; eenvoudige logarithmische en exponentiële vergelijkingen en ongelijkheden.

Algebra Gymnasium.

A. als H.B.S., A.
B. gewone en ingeklede vergelijkingen met meer dan één onbekende.
C. als H.B.S., C.
D. als H.B.S., D.
E. wortelvormen.
F. complexe getallen.

Meetkunde H.B.S.

A. betrekkingen tussen hoeken en bogen; eigenschappen van koorden; evenredigheid van lijnstukken.
B. constructie van een raaklijn uit een gegeven punt; de meetkundige plaats van de toppen der driehoeken met gemeenschappelijke basis en gelijke tophoek; constructie van algebraïsche vormen; algebraïsche analyse; uiterste en middelste reden; gelijkvormigheidspunten; gemeenschappelijke raaklijnen.
C. cirkel en driehoek.
D. cirkel en vierhoek; oppervlakte en omtrek van de cirkel; radiaal.
E. regelmatige veelhoeken.

Meetkunde Gymnasium.

A. als H.B.S., A.
B. als H.B.S., B.
C. als H.B.S., C.
D. als H.B.S., D.
E. als H.B.S., E.

F. machtlijn; Menelaus en de Ceva; eenvoudige eigenschappen van de cirkel; raking (lijn-cirkel; twee cirkels); onderlinge ligging (lijn-cirkel; twee cirkels); oppervlakte van rechtlijnige figuren.

Goniometrie H.B.S.

A. sin., cos., tg., cotg., sec. en cosec. van hoeken in de vier kwadranten; eenvoudige formules.
B. rechtstreekse tafel; logarithmen; berekeningen in de rechthoekige driehoek.

Dat de lineaire functie met toebehoren onder de leerstof van de 3e klas is opgenomen, is voor het gymnasium niets bijzonders, maar blijkt op vele hogere burgerscholen eveneens gebruikelijk.

Misschien zal iemand zich afvragen of er voldoende stof overblijft voor de hogere klassen, wanneer alle onderwerpen die bij dit onderzoek betrokken waren, in III, resp. III en IV worden behandeld. Op grond van de mededelingen van onze medewerkers omtrent de noodzaak, met de aangegeven stof tijdig klaar te zijn, moeten we aannemen dat dit het geval is. Bovendien laten anderszins opgedane ervaringen en elders weergegeven opvattingen er geen twijfel aan bestaan dat, wanneer eenmaal het onderwijs in de differentiaal- en integraalrekening in de hogere klassen geconsolideerd zal zijn, de voor het vak wiskunde in deze klassen beschikbare tijd volstrekt niet royaal geacht mag worden.

5. De volgende stap bestond in het vormen van secties die elk één van de hierboven genoemde 24 groepen van onderwerpen zouden behandelen. Deze secties konden niet uitsluitend uit de onmiddellijke medewerkers bestaan, omdat hierdoor bij hen het onderwijs in de derde, resp. derde en vierde klas door dit onderzoek te zeer zou worden beïnvloed. Bovendien zou de kleinheid van het aantal dezer docenten de objectiviteit van het onderzoek hebben kunnen schaden. Behalve de genoemde medewerkers werd daarom een aantal andere docenten in de wiskunde uitgenodigd hun medewerking aan dit onderzoek te verlenen. Deze docenten werden ten dele gekozen in overleg met de Inspectie en met de directeuren en rectoren van de betrokken scholen. Er werd gestreefd naar het vormen van secties van telkens drie medewerkers. Slechts in 11 secties gelukte het inderdaad drie medewerkers te vinden, in 9 secties moest met twee, in 4 secties zelfs met slechts één medewerker worden volstaan. Dat een docent de uitnodiging om aan dit onderzoek mede

te werken niet aanvaardde, werd slechts in enkele gevallen veroorzaakt door te weinig belangstelling of door een gebrek aan vertrouwen in de resultaten. Daarentegen kwam het dikwijls voor, dat een leraar niet kon meedoen omdat deze niet in een derde of vierde klas les gaf, omdat het aangegeven onderwerp op het tijdstip van de uitnodiging reeds geheel of gedeeltelijk behandeld was, omdat wegens tijdgebrek het aangegeven onderwerp niet of althans niet met de gewenste mate van uitvoerigheid kon worden behandeld of omdat de betrokken klas een zodanige achterstand had of een zo laag intellectueel peil vertoonde, dat de leraar er tegen op zag de te verwachten resultaten van zo'n klas naar buiten kenbaar te maken.

Zoals ik boven opmerkte, konden niet alle secties volledig bezet worden. Dit zou in nog sterkere mate zijn voorgekomen dan nu reeds het geval was, wanneer alle medewerkers van één sectie hun onderwerp in dezelfde cursus zouden hebben moeten behandelen. Daarom werd bij verscheidene secties de mogelijkheid geopend, dat de leden hun medewerking in verschillende cursusjaren verleenden. — Soms kwam een medewerker tijdens de behandeling van zijn onderwerp tot het inzicht, dat het onderzoek met een andere dan de door hem gevolgde procedure meer gediend zou zijn, en gaf hij om die reden de wens te kennen, zijn medewerking in de lopende cursus als niet gedaan te beschouwen en in de volgende de behandeling opnieuw te beginnen en dan te voltooien. — In enkele gevallen moest een medewerker wegens ziekte, onverwacht toenemen van werkzaamheden (waarnemen van het directoraat, overnemen van een eindexamenklas, en dgl.), vertrek naar een andere school, verlaten van het onderwijs, het niet toonbaar zijn van de bereikte resultaten of om andere redenen zijn reeds aangevangen medewerking afbreken, en kon de aldus ontstane open plaats in de sectie niet meer in hetzelfde cursusjaar worden gevuld. — De vorm, die de organisatie van het onderzoek om de hier genoemde redenen aannam, bracht met zich, dat er geruime tijd moest verstrijken, voor het onderzoek een stadium had bereikt, waarin het kon worden afgesloten zonder dat de resultaten van te beperkte omvang waren.

6. Aan degenen, die hun medewerking toezegden, werd verzocht mij de volgende gegevens op de daarbij aangegeven manier mede te delen.

„1. Naam en adres van de medewerker.
   Naam en adres van de school.
2. Sectie (bijv. Gymnasium Meetkunde B.)
3. Datum begin van de behandeling.
4. Datum eind van de behandeling.

5. De laatste rapportcijfers voor alle vakken van — voor zover mogelijk — elk der bij het onderzoek betrokken leerlingen. Men gelieve de leerlingen door een letter aan te duiden, en zelf deze „code" te bewaren, om daarvan bij eventuele nadere informatie gebruik te kunnen maken.
6. Van iedere les de datum en het uur; de in dat uur behandelde stof, incl. de vraagstukken; het opgegeven huiswerk (dit alles te noteren door nauwkeurige verwijzingen naar het gebruikte schoolboek). De tijd welke in dit uur besteed is aan de bespreking van het aangegeven stuk leerstof.
7. Het globale resultaat van ieder der bestudeerde lessen (voor zover men dit resultaat heeft nagegaan).
8. Voor iedere les het globale resultaat van elk der voor huis- of schoolwerk opgegeven vraagstukken. Hierbij gaarne van zoveel mogelijk vraagstukken het aantal leerlingen aangeven, die de oplossing van het vraagstuk hebben gevonden.
9. Bij iedere les de gemiddelde tijd, welke de leerlingen aan het huiswerk voor wiskunde hebben besteed; deze gegevens op grond van mededelingen van de leerlingen naar aanleiding van een desbetreffende vraag Uwerzijds.
10. Als er tijdens een lesuur schriftelijk werk gemaakt is, dan 1) een opgave van de vragen, 2) voor iedere leerling afzonderlijk het resultaat van de beantwoording van elk der vragen afzonderlijk (ter vereenvoudiging bijv. uitgedrukt in een cijfer).
11. De aard van de moeilijkheden bij het zoeken naar de oplossing van sommige vraagstukken, zoals deze door de leerlingen wordt aangeduid bij opzettelijke en schriftelijke navraag (vgl. de toelichting).
12. Vermoedelijke oorzaken van het falen van leerlingen bij de onderdelen van het behandelde onderwerp, voor elke leerling afzonderlijk.
13. De opgaven van het slotproefwerk.
14. Voor iedere leerling het resultaat van de beantwoording van elk der vragen van het slot-proefwerk afzonderlijk (als onder 10, 2e).
15. Alle verdere mededelingen of suggesties, welke men voor dit onderzoek of anderszins van waarde acht".

7. Bij deze vragen werd de volgende toelichting gegeven.

„Het onderzoek heeft slechts ten dele betrekking op een bestaande toestand. Het gaat nl. weliswaar over die leerstof, welke naar de

mening van de medewerkers de onder normale omstandigheden gebruikelijke is voor Algebra, Meetkunde en Goniometrie in de 3e klas van de h.b.s. met 5-j. c. of in de 3e en 4e klas van het gymnasium (resp. van een hiermee corresponderende afdeling van het lyceum). Echter wordt hiermee niet alleen bedoeld de stof die U onder normale omstandigheden in deze klas(sen) pleegt te behandelen — al of niet in afwijking van de bestaande voorschriften — en waarmee U dan misschien op een enigszins bevredigende manier klaar komt, maar ook

1e de eventuele andere stof die naar Uw oordeel in deze klas dient te worden behandeld op grond van programma-, examen-, bevorderings- of andere eisen;

2e de eventuele onderwerpen die U wel eens tot een hogere klas uitstelt, maar die, met het oog op een goede gang van zaken in deze hogere klassen, eigenlijk in h.b.s. III of gymnasium III en IV zouden moeten worden afgewerkt.

Evenwel wijkt de gang van zaken bij het onderzoek ook hierin van de bestaande toestand af, dat U het aan U toegewezen deel van de leerstof op een zo bevredigend mogelijke manier behandelt, waarbij U

a) aan de leerlingen de tijd geeft om alles rustig te verwerken, zowel bij het bespreken van theorie en toepassingen in de klas als bij het doen leren van de lessen en het doen maken van vraagstukken op school of thuis,

b) U er op toelegt om door middel van een voldoend aantal mondelinge en schriftelijke beurten tot een zo vaststaand mogelijk oordeel te geraken omtrent de vorderingen van de leerlingen in het onderwerp, waarvan de behandeling aan de orde is. Men mag zich dus niet laten verleiden tot een haastig behandelen van de stof, tot het doen maken van een onvoldoend aantal oefeningsvraagstukken, of tot het niet voldoende zich op de hoogte stellen van de vorderingen van iedere leerling. De verleiding daartoe kan bestaan wanneer men vrees koestert voor het niet klaar kunnen komen met de overige wiskundeleerstof; deze vrees mag hier echter geen rol spelen.

Behalve de leerstof en de graad van moeilijkheid van de vraagstukken, in het maken waarvan men vaardigheid verlangt en welke ik in het vervolg gemakshalve ook bij de leerstof zal rekenen, zijn er andere factoren die invloed zullen hebben op de duur van de behandeling. Twee daarvan lenen zich voor een objectieve beschrijving, en wel de grootte en het intellectuele peil van de klas. De grootte is exact aan te geven, het intellectuele niveau kan

worden benaderd door de rapportcijfers voor alle vakken op het laatste rapport van elk der leerlingen afzonderlijk. Voorlopig beschikken we helaas nog niet over betere middelen om dit peil vast te stellen.

Het is onze bedoeling om voor het onderwerp van elk der secties te weten te komen, hoeveel tijd een bevredigende behandeling vergt. Hierbij kan, zoals van zelf spreekt, niet volstaan worden met alleen die *tijd* aan te geven; er moet integendeel zo nauwkeurig mogelijk worden vastgesteld, hoe die tijd is besteed en op welke wijze het oordeel van de docenten omtrent de vorderingen van de leerlingen is tot stand gekomen. Dit alles is natuurlijk niet volledig mogelijk; de manier van lesgeven zal slechts ten dele voor een beschrijving vatbaar zijn, en de manier waarop de leerlingen op school of thuis werken eveneens. Datgene evenwel, wat zich hieromtrent voor een — min of meer — objectieve beschrijving leent, dient in het verslag te worden openomen. Het schema bevat daarom zo gedetailleerd mogelijke aanwijzingen, welke een dergelijke beschrijving willen bevorderen.

Het beoordelen van de vorderingen van de leerlingen wordt in grote klassen dikwijls tot een minimum beperkt; dit beoordelen vraagt n.l. van de leraar veel tijd, doordat hij een grote hoeveelheid schriftelijk werk moet corrigeren, hetgeen tot bezwaren aanleiding geeft in verband met het grote aantal lesuren dat hem is opgedragen; het dreigt verder in de klassen zelf een onevenredig groot deel van de tijd in beslag te nemen, vooral bij het geven van mondelinge beurten. Niettemin blijft het regelmatig toetsen van de vorderingen van de leerlingen één van de grondpeilers van een goede didactiek; immers, hierdoor komt eerst aan het licht, in hoeverre de leerlingen de stof onder de knie hebben en welke moeilijkheden er door (en voor) hen nog moeten worden overwonnen (of uit de weg geruimd), voor ze toe zijn aan een volgend gedeelte van de stof. Speciaal bij de wiskunde is dit het geval. — Het genoemde eerste bezwaar, nl. dat van de voor de correctie benodigde tijd, blijft bij dit onderzoek gelden. Ik doe echter een beroep op Uw medewerking in deze, en wel met te meer vrijmoedigheid waar het slechts een betrekkelijk klein gedeelte van de leerstof is, dat iedere sectie te behandelen heeft. Wat het tweede bezwaar aangaat, het regelmatig vaststellen van de bereikte resultaten zal bij dit onderzoek wel een groot, maar niet een onevenredig deel van de tijd in beslag nemen omdat het toetsen van de vorderingen hier niet in de eerste plaats geschiedt om materiaal te verzamelen voor het rapportcijfer, maar om het proces van het lesgeven op een

verantwoorde manier te doen verlopen. Het bespreken van gemaakte fouten en van gemiste vragen geeft aanleiding tot een beter begrijpen, en aldus vormt het maken van veel schriftelijk werk van beperkte omvang, resp. het mondeling beantwoorden van vragen, een met het geheel volkomen geïntegreerd deel van het leerproces. Gaarne zal ik zo volledig mogelijke mededelingen ontvangen aangaande het schriftelijk werk en de resultaten daarvan.

Men zou het bij dit onderzoek voldoende kunnen achten, wanneer door iedere sectie slechts de eindresultaten van de behandeling van het onderwerp dezer sectie werden opgegeven. Ik merkte evenwel reeds op, dat het van belang is, een zo volledig mogelijk beeld van de gang van zaken te geven. Maar bovendien ligt het in de rede om bij het constateren van het (gedeeltelijk) falen van een leerling te vragen naar de oorzaak hiervan. Het leren kennen van die oorzaken zal in vele gevallen leiden tot het beramen van middelen om zo'n leerling alsnog te doen slagen. En omdat het weten van die oorzaken een didactisch belang van de eerste orde betreft, zal ik het zeer op prijs stellen omtrent de plaats en oorzaak van zich voordoende moeilijkheden zo volledig mogelijk te worden ingelicht.

Een der in het schema opgenomen punten die hierop betrekking hebben, verdient wellicht enige toelichting. Onder no. 11 wordt men verzocht, navraag te doen omtrent de vermeende oorzaak van het niet kunnen vinden van de oplossing van een vraagstuk. In de 22e jaargang van Euclides beschreef ik op blz. 173 e.v. een methode om bij de leerlingen daarnaar te informeren, en enkele hiermee bereikte resultaten. Ik gaf daarin aan, dat ik dit dikwijls op de volgende manier deed. Wanneer met een zeker repetitievraagstuk een onbevredigend resultaat was bereikt, en het vraagstuk in de volgende les was besproken, liet ik mijn leerlingen een stuk papier nemen en opschrijven wat voor hun besef nu de eigenlijke moeilijkheid was. Het blijkt dan, dat de leerlingen er niet altijd, maar toch dikwijls, in slagen zichzelf duidelijk te maken waarin voor hen de moeilijkheid bestaat. Sommigen zien dit zelfs met een verrassende scherpte."

„Ik moge U er nog aan herinneren, wat naar mijn mening de limiet is, waartoe de behandeling van elk der onderwerpen dient te gaan. Het komt mij voor, dat de behandeling van een onderdeel van de stof pas dan beëindigd mag worden, wanneer dit — met een enkele hoge uitzondering — beheerst wordt door al die leerlingen, welke een normale ijver aan de dag leggen en voor de andere schoolvakken over het algemeen voldoende cijfers hebben.

Het is niet de bedoeling, dat binnen een sectie op enigerlei wijze een wedstrijd-element optreedt; integendeel, wanneer het voor de leden van een sectie mogelijk is met elkaar contact te hebben vóór en tijdens de behandeling van het betrokken onderwerp, zullen de resultaten zeker aan betekenis winnen.

Bij publicatie van de resultaten van dit onderzoek zullen geen namen van leerlingen worden genoemd, en namen van docenten of van scholen hoogstens zo, dat daaruit hun medewerking aan het onderzoek blijkt, maar meer niet."

In een voorlopig schrijven aan enkele medewerkers was de mogelijkheid onder ogen gezien, de eindresultaten binnen eenzelfde sectie te toetsen door middel van centraal schriftelijk werk. Het hier niet weergegeven gedeelte van de boven geciteerde toelichting had daarop betrekking. Er werd o.a. in opgemerkt, dat „vooralsnog de resultaten van zulk „examenwerk" niet het belangrijkste deel van dit onderzoek (vormen), en wel omdat men zich bij het opstellen van dit werk gemakkelijk op ernstige wijze in de graad van moeilijkheid kan vergissen." Hoewel er bij een aantal medewerkers zeker belangstelling bestond voor centraal werk, werd bij nadere overweging om de genoemde reden en omdat bij het samenstellen van centraal schriftelijk werk òf met te veel omstandigheden aan de verschillende medewerkende scholen rekening zou moeten worden gehouden òf het werk van de docenten al te zeer beïnvloed zou worden, van het samenstellen van dergelijk werk afgezien. Ieder werd verzocht zelf alle proefwerken samen te stellen en zelf te beoordelen in hoeverre overleg met de andere leden van de sectie, waartoe men behoorde, wenselijk geacht moest worden.

8. Uit de aard en de omvang van de werkzaamheden, waarvoor op de medewerkers aan dit onderzoek een beroep werd gedaan, is reeds zonder meer duidelijk, dat niet van een willekeurige docent bereidheid tot medewerking mocht worden ondersteld en dat degenen die zich hiertoe wel bereid verklaarden zich er van bewust moesten zijn, dat er grote opofferingen van tijd en moeite van hen werden verlangd. Voor sommigen betekende medewerking, dat een onderwerp op een voor hen ongebruikelijke plaats in de cursus moest worden behandeld. Anderen moesten zichzelf de behandeling opleggen van onderwerpen van grotere of kleinere omvang die zij anders voorlopig achterwege zouden hebben gelaten. En voor allen gold, dat zij zich met meer dan gewone zorg aan de behandeling van één bepaald onderwerp moesten gaan wijden en zich de niet te onderschatten moeite getroosten om van het verloop en de

resultaten een verslag te maken. Wij willen niet onvermeld laten, dat in vele gevallen, waarin een leraar voor medewerking in een bepaalde sectie werd uitgenodigd maar op grond van de door hem gevolgde methode of om een andere reden niet in aanmerking bleek te kunnen komen, hij zich uit eigen beweging beschikbaar stelde voor een plaats in een andere sectie; van dit aanbod kon meestal gebruik worden gemaakt. — Hieronder volgen de namen van de docenten en de scholen die aan het onderzoek medewerkten.

D. ALGERA, Chr. Lyceum, Stadskanaal.
P. BEIMERS, Lorentz H.B.S., Arnhem.
Mej. G. BOEKHOFF, Gem. H.B.S., Apeldoorn.
Ir G. A. BOLKESTEIN, Gem. Lyceum, Enschede.
Dr C. J. BRESTER, Gem. H.B.S., Utrecht.
Dr. P. BRONKHORST, Lorentz Lyceum, Eindhoven.
H. A. BRUNA, R.K. Lyceum voor Meisjes, Rotterdam.
J. A. M. COX, Gem. Gymnasium, Maastricht.
Dr N. P. DEKKER, Gem. Gymnasium, Gorinchem.
Dr A. VAN DOP, Gem. H.B.S., Hilversum
Dr M. DORLEIJN, Geref. Gymnasium, Kampen.
J. C. VAN DORSSEN, Chr. H.B.S., Utrecht.
Dr A. J. J. DUBBELD, R.K. Gymnasium, Maastricht.
A. J. DUNNEBIER, Lorentz H.B.S., Arnhem.
Mevr. Dr C. FABER-GOUWENTAK, Barlaeus Gymnasium, Amsterdam.
Dr H. GERRITSEN, Chr. Gymnasium, Utrecht.
S. J. GEURSEN, Rijks H.B.S., Tiel.
H. GEURTS, Canisius College, Nijmegen.
Ir B. GROENEVELD, Lorentz Lyceum, Eindhoven.
Zr C. HAMERS, St. Theresia Lyceum, Tilburg.
A. HOLWERDA, 2e Chr. H.B.S., Rotterdam
J. F. HUFFERMAN, Chr. H.B.S., Zeist.
G. T. M. JANSSEN VAN LOY, Bisschoppelijk College, Roermond.
Dr A. KATER, Winterswijks Lyceum, Winterswijk.
Mej. Dr A. T. M. KRAMER, R.K. Lyceum voor Meisjes, Den Haag.
Ir P. K. KRIJGER, Gem. H.B.S., Apeldoorn.
Ir L. H. LANDRÉ, 1e Vrijz. Chr. Lyceum, Den Haag.
L. J. DE LANGE, Chr. Lyceum, Almelo.
D. LEUJES, Gem. Gymnasium, Delft,
Dr H. MOOY, Barlaeus Gymnasium, Amsterdam.
Dr J. NAGEL, Gem. Gymnasium, Nijmegen.
Mej. D. M. NIEUBUUR, Gem. H.B.S. voor Meisjes, Leeuwarden.
H. M. J. VAN OVEREEM, Chr. Gymnasium, Utrecht.
J. OVING, Rijks H.B.S., Assen.
Mevr. A. PETERS-HIEMSTRA, Gem. Lyceum, Den Helder.
L. C. W. VAN RIJEN, Gem. Lyceum, Eindhoven.
Ir B. D. DE ROOS, Gem. Gymnasium, Middelburg.
G. A. J. ROOTH †, Libanon Lyceum, Rotterdam.
Mej. C. M. W. RUITERS, R.K. Lyceum voor Meisjes, Maastricht.
K. W. SCHUTTE, Chr. Lyceum, Almelo.
Ir J. SNOEP, Gem. Lyceum, Kampen.
B. VAN SOLDT, Rijks H.B.S., den Helder.
Dr H. STREEFKERK, Chr. Lyceum, Hilversum.
W. P. E. A. THEUNISSEN, Bisschoppelijk College, Roermond.
S. UBBELS, Chr. H.B.S., Utrecht.
W. J. DE VOS, Rijks H.B.S., Schiedam.
Dr P. G. J. VREDENDUIN, Gem. Gymnasium, Arnhem.
Dr J. H. WANSINK, Lorentz H.B.S., Arnhem.

9. Bij iedere medewerker werd het aantal lesuren vastgesteld dat deze aan het opgegeven onderwerp besteedde. In veel gevallen werd dit aantal uren gespecificeerd naar de onderdelen, waarin het onderwerp van de sectie kan worden verdeeld. Dikwijls was een dergelijke specificatie nodig omdat niet alle medewerkers van eenzelfde sectie alle onderdelen hadden behandeld, terwijl in voorkomende gevallen moest worden vermeden, dat een onderdeel bij meer dan één sectie in rekening werd gebracht. Bij het beoordelen van het aantal uren dat bij de aangegeven onderdelen is vermeld, moet in aanmerking worden genomen, dat de genoemde onderwerpen niet altijd volledig van elkaar te scheiden zijn; zo is bijv. in de sectie H.B.S. Algebra D het afsplitsen van een kwadraat, dat niet afzonderlijk wordt genoemd, bij het onderwerp „grafiek" gerekend, terwijl het met evenveel recht onder „tekenverloop en ongelijkheden" had kunnen worden opgenomen. Deze indelingen zijn op een dergelijke manier gekozen ten einde een juiste berekening van het gemiddelde aantal uren voor de sectie te bevorderen.

In de uren, vermeld bij „proefwerk", zijn in vele gevallen ook lessen begrepen, die uitsluitend gewijd zijn aan het bespreken van de resultaten van de proefwerken.

Hier volgt een overzicht van de bestede aantallen uren.

AANTAL LESUREN, GEBRUIKT DOOR ELK DER MEDEWERKERS AFZONDERLIJK.

H.B.S. Algebra

Sectie A.	aantal uren	
Docent 1.	18	Geen lineaire ongelijkheden.
	2	Proefwerk.
Docent 2.	16	Excl. lineaire ongelijkheden.
	1	Lineaire ongelijkheden.
	3	Proefwerk.
Docent 3.	21	Excl. lineaire ongelijkheden.
	2	Lineaire ongelijkheden.
	4	Proefwerk.
Sectie B.		
Docent 1.	6	Rekenkundige reeks.
	9	Meetk. reeks, incl. oneindig voortlopende.
	3	Proefwerk.
Docent 2.	8	Rekenkundige reeks.
	13	Meetk. reeks, incl. oneindig voortlopende.
	2	Proefwerk.

Sectie C.	aantal uren	
Docent 1.	23	Geen ingeklede vierkantsvergelijkingen.
	4	Proefwerk.
Docent 2.	22	
	2	Proefwerk.
Docent 3.	24	Geen ingeklede vierkantsvergelijkingen.
	3	Proefwerk.
Sectie D.		
Docent 1. [1])	5	Grafiek.
	6	Tekenverloop en ongelijkheden.
	1	Ontbinding.
	2	Raaklijn.
	7	Proefwerk.
Docent 2.[1])	3	Tekenverloop en ongelijkheden.
	3	Ontbinding.
	4	Extreme waarden.
	1	Raaklijn.
	2	Proefwerk.
Docent 3. [1])	9	Grafiek.
	5	Tekenverloop en ongelijkheden.
	1	Extreme waarden.
	2	Proefwerk.
Sectie E.		
Docent 1.[1])	7	Oneigenlijke machten.
	17	Logarithmen.
	4	Exponentiële (geen logarithmische) vergelijkingen.
	4	Proefwerk.
Docent 2.[1])	8	Oneigenlijke machten.
	18	Logarithmen.
	10	Logarithmische en exponentiële veigelijkingen.
	5	Proefwerk.
Docent 3. [1])	5	Oneigenlijke machten.
	15	Logarithmen.
	2	Proefwerk.

H.B.S. Goniometrie.

Sectie A.		
Docent 1.	7	Hoeken, kleiner dan 90°.
	3	Hoeken, groter dan 90°.
	1	Proefwerk.

	aantal uren	
Docent 2.	5	Hoeken, kleiner dan 90°.
	4	Hoeken, groter dan 90°.
	4	Proefwerk.
Sectie B.		
Docent 1.[1])	3	Onderwerpen uit sectie A.[2])
	2	Berekeningen in bijzondere rechthoekige driehoeken, zonder gebruik van een tafel.
	4	Sinus- en cosinusregel, met meetkundige toepassingen.[2])
	1	Proefwerk.
Docent 2.[1])	10	De volledige stof van sectie A. [3])
	2	Rechtstreekse tafel.
	4	Sin $(A + B)$, enz.[2])
	2	Vergelijkingen van het type sin $ax = b$.[2])
	3	Proefwerk.

H.B.S. Meetkunde.

Sectie A.		
Docent 1.	16	
	5	Proefwerk.
Docent 2.	12	
	2	Proefwerk.
Docent 3.	14	
	2	Proefwerk.
Sectie B.		
Docent 1.	14	De ingezonden gegevens waren achteraf verzameld en onvolledig.
Sectie C.		
Docent 1.	8	
	1	Proefwerk.
Docent 2.	13	
	2	Proefwerk.
Docent 3.	13	
	3	Proefwerk.
Sectie D.		
Docent 1.	9	Cirkel en vierhoek.
	9	Oppervlakte en omtrek cirkel. Radiaal.
	3	Proefwerk.
Docent 2.	8	Cirkel en vierhoek.
	3	Oppervlakte en omtrek cirkel.
	4	Proefwerk.

	aantal uren	
Docent 3.	9	Cirkel en vierhoek.
	6	Oppervlakte en omtrek cirkel.
	3	Proefwerk.
Sectie E.		
Docent 1.	15	
	3	Proefwerk.
Docent 2.	14	
	3	Proefwerk.
Docent 3.	9	
	1	Proefwerk.

Gymnasium. Algebra.

Sectie A. [4]		
Docent 1.[1]	12	Lineaire functie en grafiek.
	1	2 kwadratische vergelijkingen met 2 onbekenden.[2]
Docent 2.	16	Lineaire functie en grafiek.
	8	Ongelijkheden.
	6	Afhankelijkheid en strijdigheid.
	9	2 vergelijkingen met 2 onbekenden.[5]
	11	*n* vergelijkingen met *n* onbekenden, homogene vergelijkingen, enkele ingeklede vergelijkingen.[4]
Docent 3.[1]	9	Afhankelijkheid en strijdigheid.
Sectie B.		
Docent 1.	7	2 vergelijkingen met 2 onbekenden.
	4	*n* vergelijkingen met *n* onbekenden.
	3	Ingeklede vergelijkingen.
	3	Afhankelijkheid en strijdigheid.[6]
	6	Proefwerk.
Docent 2.	7	2 vergelijkingen met 2 onbekenden.
	10	*n* vergelijkingen met *n* onbekenden.
	1	Ingeklede vergelijkingen.
	3	Proefwerk.
Sectie C.		
Docent 1.	9	Oplossing van de v.v., incl. ingeklede v.v.en.
	6	Eigenschappen van de wortels.
	7	Transformatie van v.v.en en v.v.en met gemeenschappelijke wortel.
	1	Ontbinding van het linker lid.[2]
	3	Proefwerk.

	aantal uren	
Docent 2.[1])		
(1e behandeling)	15	Oplossing van de v.v., incl. ingeklede v.v.en.
	2	Complexe getallen.
	2	Oplossing van de v.v. in het complexe gebied.
	2	Eigenschappen van de wortels.
	2	Proefwerk.
Docent 2.[1])		
(2e behandeling)	15	Oplossing van de v.v., incl. ingeklede v.v.en.
	1	Complexe getallen.
	2	Oplossing van de v.v. in het complexe gebied.
	6	Eigenschappen van de wortels.
	3	Ontbinding van het linkerlid.[2])
	3	Proefwerk.
Docent 3.	9	Oplossing van de v.v., incl. ingeklede v.v.en.
	2	Complexe getallen.
	1	Oplossing van de v.v. in het complexe gebied.
	5	Eigenschappen van de wortels.
	4	Transformatie van v.v.en en v.v.en met gemeenschappelijke wortel.
	2	Ontbinding van het linker lid.[2])
	3	Proefwerk.
Sectie D.		
Docent 1.[1])	4	Grafiek.
	2	Tekenverloop en ongelijkheden.
	9	Ontbinding.
	3	Extreme waarden.
	3	Proefwerk.
Docent 2.[1])	5	Grafiek.
	3	Tekenverloop ,en ongelijkheden.
	4	Extreme waarden.
	3	Proefwerk.
Sectie E.		
Docent 1.	36	
	5	Proefwerk.
Sectie F.		
Docent 1.	7	
	4	Proefwerk.
Docent 2.	5	
	6	Proefwerk.

Gymnasium Meetkunde.

Sectie A.	aantal uren	
Docent 1.	14	Evenredigheid van lijnstukken.
	8	De overige onderdelen van deze sectie.
	3	Proefwerk.
Docent 2.[1]) (1e behandeling)	7	Evenredigheid van lijnstukken.
	1	Proefwerk.
Docent 2. (2e behandeling)	6	Evenredigheid van lijnstukken.
	6	De overige onderdelen van deze sectie.
	4	Proefwerk.
Sectie B.		
Docent 1.[1])	6	Meetkundige plaats van de toppen.
	6	Constructie algebraïsche vormen.
	2	Uiterste en middelste reden.
	8	Gemeenschappelijke raaklijn en gelijkvormigheidspunt.
	7	Proefwerk.
Docent 2.[1])	7	Raking.
	10	Gemeenschappelijke raaklijn en gelijkvormigheidspunt.
	3	Proefwerk.
Docent 3.[1])	9	Meetkundige plaats van de toppen.
	4	Constructie algebraïsche vormen.
	11	Gemeenschappelijke raaklijn en gelijkvormigheidspunt.
	5	Proefwerk.
Sectie C.		
Docent 1.	13	
	3	Proefwerk.
Sectie D.		
Docent 1.[1])	3	Cirkel en vierhoek.
	2	Proefwerk.
Docent 2.	10	Cirkel en vierhoek.
	4	Oppervlakte en omtrek cirkel, radiaal
	2	Proefwerk.
Sectie E.		
Docent 1.	8	
	1	Proefwerk.

	aantal uren	
Sectie F.[1])		
Docent 1.	5	Machtlijn.
	5	Menelaus en de Ceva.
	23	Oppervlakte van rechtlijnige figuren.
	12	Eenvoudige eigenschappen van de cirkel en onderlinge ligging van twee cirkels.
Docent 2.[1])	18	Machtlijn.
	12	Menelaus en de Ceva.

[1]) De ingezonden gegevens hadden slechts betrekking op de aangegeven onderdelen van het onderwerp van de sectie.
[2]) Behoort niet tot het onderwerp van de sectie en daarom niet in rekening gebracht.
[3]) In rekening gebracht bij sectie A van de goniometrie.
[4]) In deze sectie zijn de uren, besteed aan proefwerk, begrepen in die van de aangegeven onderdelen.
[5]) In rekening gebracht bij sectie B van de algebra.
[6]) In rekening gebracht bij sectie A van de algebra.

10. Op grond van de gegevens, welke in het bovenstaande overzicht vermeld zijn, werd voor iedere sectie het gemiddelde aantal uren berekend, dat de behandeling van het onderwerp dier sectie in beslag nam. Deze gemiddelden zijn in het volgende overzicht aangegeven.

GEMIDDELD AANTAL LESUREN, GEBRUIKT DOOR ELK DER SECTIES.

Sectie	Aantal uren		Opmerkingen
	H.B.S.	Gymnasium	
Algebra A	23	28	Sectie G.A.C. heeft 3 uren aan de complexe getallen besteed; deze zijn niet in rekening gebracht.
H.B.S. „ B	20½	—	
Gymnasium „ B	—	20	
„ C	26	27	Sectie G.A.D.: geen snijlijn en raaklijn.
„ D	21	22½+	Sectie H.A.E.: geen logarithmische en exponentiële functies en ongelijkheden.
H.B.S. „ E	37+	—	
Gymnasium „ E	—	41	
„ „ F	—	11	
Totaal Algebra	127½	149½	
Goniometrie A	11	—	Geen berekeningen van enige betekenis.
„ B	5+	—	
Totaal Goniometrie	16		
Meetkunde A	17	20	Sectie H.M.B.: aantal uren onzeker.
„ B	14	36+	Sectie G.M.B.: geen algebraïsche analyse.
„ C	13	16	
„ D	18	12	
„ E	15	9	
Gymnasium „ F	—	55	
Totaal Meetkunde	77	148	
Algemeen totaal	220½	297½	

Een plus-teken wil zeggen: het onderwerp van de sectie is niet volledig behandeld.

11. Door voor de hogere burgerscholen en voor de gymnasia de gemiddelde tijden uit bovenstaande tabel op te tellen, werd als resultaat verkregen, dat aan de behandeling van het totale programma van de betrokken klassen resp. 220,5 en 297,5 lesuren waren besteed. Hierbij moet het volgende in aanmerking worden genomen:

a. De totalen zijn mede ontstaan uit de aantallen uren, besteed aan een onderwerp of een onderdeel daarvan, waarover door slechts één medewerker verslag is uitgebracht; deze aantallen uren zijn uitteraard niet even betrouwbaar als die, welke een gemiddelde aangeven.

Bij de h.b.s. doet zich een dergelijk geval voor bij sectie H.M.B. De onzekerheid omtrent het aantal uren, dat de behandeling van het onderwerp dezer sectie op de h.b.s. vereist en dat bij de enige medewerker in deze sectie 14 bedroeg, wordt nog vergroot doordat de ingezonden gegevens pas achteraf verzameld en bovendien onvolledig waren. Aangezien de drie medewerkers van de overeenkomstige gymnasium-sectie voor dit onderwerp gemiddeld 36 uren nodig hadden, is het aantal uren voor de h.b.s. bij deze sectie waarschijnlijk aan de lage kant genomen.

Bij het gymnasium bestonden de secties G.A.E., G.M.C. en G.M.E. elk uit één medewerker. Het onderwerp van de eerste dezer secties, nl. wortelvormen, nam 41 uren. Dit aantal kan niet vergeleken worden met dat van een h.b.s.-sectie, maar er is mijns inziens geen reden het als abnormaal hoog te beschouwen. Het totaal van de uren van de andere twee der genoemde secties is 3 lager dan het totaal der corresponderende h.b.s.-secties (elk bezet door drie medewerkers) en kan dus eveneens als normaal worden beschouwd. In de sectie G.M.F. werden door slechts één medewerker de onderdelen: oppervlakte van rechtlijnige figuren, eenvoudige eigenschappen van de cirkel en onderlinge ligging van twee cirkels behandeld. Het aantal hieraan bestede uren bedraagt 35 en lijkt niet abnormaal hoog.

b. Een ander element van onzekerheid ligt in het grote verschil tussen het aantal uren, besteed door de twee medewerkers in de sectie G.M.F. aan het onderdeel: machtlijn, Menelaus en de Ceva, van het onderwerp dezer sectie; deze aantallen zijn resp. 10 en 30 uren. Het gemiddelde hiervan is wellicht aan de hoge kant.

c. Enkele onderdelen van de sectie-onderwerpen werden niet behandeld; dit is in het overzicht van § 10 bij de betrokken secties aangegeven.

d. In de vermelde aantallen uren zijn geen lessen verdisconteerd,

die men aan het eind van een kwartaal of van het cursusjaar veelal besteedt aan de opzettelijke herhaling van de behandelde stofgedeelten.

e. Aan het onderzoek werd zowel door onvoldoende, als door middelmatige en goede klassen deelgenomen. Ik merkte echter reeds op, dat in enkele gevallen een docent berichtte van medewerking te moeten afzien wegens het lage peil van zijn klas. Aangezien ook in andere gevallen ondersteld mag worden, dat een leraar zijn klas slechts dan aan een experiment als het hier beschrevene wilde blootstellen, indien hij er op kon rekenen dat deze klas daardoor niet in té grote moeilijkheden zou komen bij de resterende gedeelten van het af te werken wiskundeprogramma, zal het gemiddelde peil van het totaal van de klassen, waarin het onderzoek plaats vond, eerder aan de hoge dan aan de lage kant zijn.

f. Enkele medewerkers gaven te kennen, dat ze, ondanks de onbevredigende resultaten, wegens dreigend tijdgebrek de behandeling van hun onderwerp moesten staken. —

Op grond van deze overwegingen mogen wij aannemen, dat, in het algemeen, voor een bevredigende behandeling van het volledige programma de boven vastgestelde totale aantallen uren niet aan de hoge kant zijn.

We willen voorlopig onderstellen, dat in de verschillende secties de behandeling van de onderscheidene leerstofgedeelten volgens het voorgestelde plan is geschied. Dat dus inderdaad alle tijd is uitgetrokken, die nodig was om de leerlingen die er voor in aanmerking komen, een volledig inzicht in de stof te verschaffen, en dat de resultaten van de proefwerken van deze leerlingen ondubbelzinnig getuigenis van dit inzicht hebben afgelegd. Op deze onderstelling kom ik aanstonds terug.

12. We zullen thans een begroting maken van het aantal lesuren dat in de betrokken klassen voor de behandeling van het programma beschikbaar is, ten einde een vergelijking te kunnen maken tussen het benodigde en het beschikbare aantal uren. Om dit laatste te kunnen vaststellen, dient men te bedenken, dat het gemiddelde aantal weken dat in een volledige cursus in feite voor het lesgeven beschikbaar is, om allerlei redenen ver beneden datgene blijft wat men verkrijgt door het wettelijke of gebruikelijke aantal vacantieweken van 52 af te trekken. Deze redenen zijn o.a.: het eindexamen, het toelatingsexamen, werkweken, ziekte van de leraar, ziekte van grote groepen leerlingen, nationale of kerkelijke feestdagen, lerarenvergaderingen, ijsvacantie, sportwedstrijden, concerten, toneelvoorstellingen.

Ten einde een beeld te krijgen van het aantal per jaar feitelijk beschikbare wiskunde-uren, vroeg ik de medewerkers naar hun bevindingen hiermede. Uit de ontvangen antwoorden blijkt:

het gemiddelde van het aantal weken dat in een volledige cursus in feite voor het lesgeven als beschikbaar wordt beschouwd, bedraagt

voor h.b.s. III: 35,4,

voor gymnasium III en IV: 35,6.

Voor h.b.s. en gymnasium samen bedraagt het gemiddelde 35,5 weken, met een minimum van 33 en een maximum van 38 weken.

Het aantal wekelijkse lesuren voor wiskunde is 5 voor h.b.s. III (in uitzonderingsgevallen 6), 3 voor gymnasium III, meestal 3 en soms 2 voor gymnasium IV. Ter vereenvoudiging van de berekening zullen we onderstellen, dat het aantal lesuren 5 is voor h.b.s. III en 3 voor gymnasium III en IV, aldus het aantal beschikbare uren aan de royale kant nemende.

Dan blijkt het aantal uren dat jaarlijks in h.b.s. III en in gymnasium III en IV beschikbaar is, resp. 177,5 en 213 te bedragen.

Wanneer we voorlopig aannemen, dat de in § 11 *gemaakte onderstelling omtrent de behandeling van het aangegeven programma juist is, komen we dus reeds bij deze ruwe schatting van het aantal benodigde lesuren tot de conclusie, dat dit zowel op de h.b.s. als op het gymnasium uitgaat boven het aantal beschikbare uren. Het exces bedraagt resp.* 43 *en* 84,5 *uren, hetgeen neerkomt op* 24 % *van de beschikbare uren voor de h.b.s. en* 40 % *van die voor het gymnasium.*

(Wordt vervolgd)

HET WISKUNDIGE MODEL IN DE ERVARINGSWETENSCHAPPEN [1])

door

Prof. Dr D. VAN DANTZIG.

1. De algemene gang van zaken in een uitgebreide groep van ervaringswetenschappen voltrekt zich globaliter volgens een aantal stappen, die ik bij een vroegere gelegenheid[2]) ongeveer als volgt heb aangegeven:

1. Voorafgaande ervaring; 2. Herinnering daaraan; 3. Waarneming; 4. Beschrijving daarvan; 5. Modelvorming; 6. Formalisering; 7. Inductie; 8. Axiomatisering; 9. Deductie; 10. Interpretatie; 11. Verwachting; 12. Handeling.

Te dezer plaatse wil ik slechts enkele punten uit het geciteerde betoog samenvatten, die in het bijzonder op de middenfasen betrekking hebben. De belangrijkste daarvan is de zgn. „inschakeling" van een *model.* Deze bestaat, kort gezegd, daarin, dat aan de werkelijke waarnemingsbeschrijvingen een beetje gedokterd wordt, waardoor ze gemakkelijker handelbaar worden. Bij voorbeeld wordt bij numerieke waarnemingen een enkele sterk afwijkende aan een „foutieve aflezing" geweten, terwijl kleine fluctuaties b.v. aan „waarnemingsfouten" geweten en (althans in eerste aanleg) verwaarloosd worden. Het model geeft dus een *vereenvoudigd* en *geregulariseerd* beeld van de oorspronkelijke waarnemingsbeschrijving, zoals een scheepsmodel van een schip of een maquette van een stadsdeel. De modelvorming moet aan twee contradictoire eisen voldoen: als het model te véél van de oorspronkelijke werkelijkheidsbeschrijving verschilt is het voor de latere fasen 10—12 niet meer bruikbaar, en als het niet voldoende geregulariseerd is, is het praktisch niet hanteerbaar, inzonderheid met betrekking tot de middenfasen 6—9. Overigens is de modelvorming slechts een voortzetting in lichtelijk gewijzigde vorm van de *beschrijving* der waarnemingen zelf. Immers daarbij treedt ook een vereenvoudiging en regulari-

[1]) Voordracht gehouden op de vacantiecursus voor leraren op Vrijdag 22 Augustus 1952.

[2]) D. VAN DANTZIG, General procedures of empirical science, Synthese 5, 441—455, 1947.

sering op, zoals die trouwens aan alle taal inhaerent is: een verbale beschrijving van waargenomen verschijnselen is nooit zó compleet, dat deze verschijnselen daaruit in alle details ondubbelzinnig reconstrueerbaar zijn. Geen enkel woord- (of formule-) systeem kan wèlk verschijnsel ook exact en volledig weergeven; het kan slechts appelleren aan de eigen ervaring van de lezer, en hem een voor bepaalde doeleinden voldoend duidelijk beeld ervan geven. Ook hier zou een *te* grote precisie tot onhanteerbaarheid leiden, terwijl anderzijds een te grote beknoptheid der beschrijving tot een àl te geringe reproduceerbaarheid der verschijnselen leidt, die b.v. met de term „vaagheid" aangeduid wordt.

De *formalisering* is een opmerken en weergeven van bepaalde in het model voorkomende regelmatigheden. Formeel logisch kan dit geschieden door bepaalde uitspraken als „waar" te aanvaarden. Deze uitspraken kunnen herleid worden tot al-uitspraken of negaties daarvan, waarbij predicaten optreden die één of meer variabelen bevatten, die *bepaalde verzamelingen van gedane waarnemingen* doorlopen. B.v.: alle waarnemingen die de eigenschap A bezitten, hebben ook de eigenschap B. Of: voor alle x geldt: als x tot de gedane waarnemingen W behoort en als $A(x)$ geldt, dan ook $B(x)$.

De inductiestap bestaat nu daarin, dat in deze uitspraken de verzameling W van gedane waarnemingen tot een ruimere verzameling W' van gedane en nog te verrichten waarnemingen wordt uitgebreid en dat er toch nog dezelfde waarheidswaarde aan wordt toegekend. Door een verdergaande modelvorming wordt deze verzameling W' nog weer uitgebreid door er geheel denkbeeldige waarnemingen aan toe te voegen, waarbij er veelal een *oneindige* verzameling W'' voor in de plaats komt. Door een aantal der inductief gegeneraliseerde aan het model ontleende, als waar aanvaarde uitspraken als *axioma's* in te voeren, daaruit *deductief* nieuwe formele uitspraken af te leiden, en deze als eventuele waarnemingsresultaten te *interpreteren* („uitschakeling" van het model) komt men via de *verwachting*, dat deze resultaten bij werkelijke waarnemingen inderdaad empirisch geconstateerd zullen worden tot de *handelingen* (b.v. bepaalde experimenten of constructies), die de eigenlijke toepassing van het formalisme uitmaken.

2. In de geciteerde publicatie is een aantal in filosofische en populariserende geschriften veelvuldig gemaakte fouten opgesomd, waarvan de belangrijkste op modeloverschatting berusten. B.v. de bij EDDINGTON voorkomende opmerking, dat „de wereld is opgebouwd uit partiële differentiaalvergelijkingen". Correcter ware

geweest te zeggen, dat het doorgaans in de natuurkundige wetenschappen gebruikte *model* voor onze ervaringen van „de wereld" uit vergelijkingen van het genoemde type kan worden opgebouwd.

Een andere, nog veel vaker gemaakte fout bestaat daarin dat men zegt, dat de uitkomsten van metingen, of daaruit afgeleide fysische constanten, reële getallen (in de zin der analyse) zijn. Ten aanzien van de meetresultaten zèlf is het evident dat dit onjuist is: iets nauwkeuriger ware het te zeggen, dat zulk een uitkomst een *interval* van reële getallen is. Ook dit is evenwel niet geheel juist, daar de uiteinden van het interval niet steeds ondubbelzinnig uit de waarneming kunnen worden afgeleid. (Juistheid kan hier echter bereikt worden door slechts voldoend grote, *elkaar overdekkende* intervallen als „meetresultaten" toe te laten). Klaarblijkelijk is het vervangen van zulke intervallen door reële getallen weliswaar doorgaans niet te vermijden en zeer nuttig, maar een vrij ver gaande vereenvoudiging van de werkelijk gedane waarnemingen. (Te zeggen, dat de uitkomsten *rationale* getallen zijn, zoals wel gedaan wordt (t.w. bij voorbeeld de middens der bedoelde intervallen) is om dezelfde reden evenmin geheel correct). Van fysische constanten wordt vaak gezegd, dat hun „ware waarde" (een reëel getal) tengevolge van onvermijdelijke waarnemingsonnauwkeurigheden niet bepaald kan worden. Ook deze uitspraak is strikt genomen fout, daar zij impliceert dat het begrip dezer „ware waarde" vaststaat. Immers een dergelijke „ware waarde" kan niet alleen niet gemeten maar zelfs niet met onbeperkte nauwkeurigheid *gedefinieerd* worden. En het is niet slechts tengevolge der quantumverschijnselen, dat dit niet mogelijk is. Om de „ware waarde" van de massa der zon als een reëel getal te definiëren zou men o.a., daar deze door straling voortdurend verandert, vooraf het *tijdstip* waarop deze massa beschouwd wordt met onbeperkte nauwkeurigheid moeten definiëren. Om de massa van een mens als reëel getal te definiëren, zou men o.a. niet slechts het tijdstip der massabepaling moeten vastleggen, maar bovendien van elk stofje op zijn huid, van elke losgelaten huidschilfer, ja zelfs van elk molecuul van zijn adem *per definitie* moeten bepalen of het al dan niet meegeteld moet worden. Ook bij elke andere fysische grootheid doen zich dezelfde verschijnselen voor.

Het gebruik van de term „idealisering", waarmede men soms de inschakeling van het formalisme der reële getallen verantwoordt, geeft daaraan een nauwelijks te verdedigen gevoelskleur. Correcter ware het m.i. te zeggen, dat deze berust op een ter bereiking van het gestelde doel (b.v. bestudering van bepaalde verschijnselen-

complexen) onontbeerlijke *verwaarlozing* van de lengte van het onbepaaldheidsinterval der beschouwde grootheden.

Deze fictie van de existentie der ,,ware waarden'' leidt zelf weer tot verdere en zelfs zeer ernstige fouten. Ik behoef nauwelijks de schijnvraag te noemen, of b.v. de massa van de aarde een rationaal dan wel een irrationaal getal is, m.a.w. de mening, dat deze vraag weliswaar experimenteel niet te beantwoorden, maar wel zinvol is. Belangrijker echter is, dat de gehele causaliteitsleer van Laplace en zijn opvolgers op deze fictie berust: indien men op een willekeurig gekozen tijdstip de plaatsen en de snelheden van alle materiële deeltjes zou kennen, zouden deze volgens Laplace (die overigens de snelheden vergat te noemen) ook op een willekeurig later (of vroeger) tijdstip ondubbelzinnig bepaald zijn. De conclusie is slechts voor ieder tijdstip juist, indien genoemde grootheden met onbeperkte nauwkeurigheid bekend waren. Aldus echter zijn ze niet slechts onbekend, maar ook ongedefinieerd, en zelfs ondefinieerbaar. Men ziet, dat deze weerlegging van het ,,causaliteitsbeginsel'' niet noodzakelijk op de quantummechanika een beroep behoeft te doen, maar reeds lang vóór dien mogelijk ware geweest.

3. Ook de functie van de deductieve redenering wordt niet steeds duidelijk ingezien, of althans weergegeven. Geen enkele deductie kan iets bewijzen omtrent de uitkomsten van nog niet gedane waarnemingen. Ook kunnen nòg zovele overeenstemmingen van deze uitkomsten met de deductief voorspelde nooit de juistheid van het axiomasysteem, of algemener het model, bewijzen, daar de deductie steeds *binnen* het model plaats vindt, dus de juistheid daarvan vóóronderstelt. Deze juistheid kan dus, strikt genomen, nooit bewezen, maar wèl *weerlegd* worden, t.w. door een niet-overeenstemming (daarbij thans afziende van eventuële twijfel omtrent juistheid van de waarneming, interpretatie van een deductieve uitspraak, e.d.). Ieder mathematisch ,,bewijs'' van een waarneembaar verschijnsel (b.v. van het feit, dat drie krachten, overeenkomende met twee zijden en een passend georiënteerde diagonaal van een parallelogram elkaar in evenwicht houden) is dus een schijnbewijs. In werkelijkheid wordt zelfs na verifiëring van overeenstemming van voorspelling en waarneming, slechts bewezen, dat het model, of het hypothesen- of axioma-stelsel *vooralsnog* niet weerlegd is.

4. Ook ten aanzien van de betekenis van het oneindigheidsbegrip in de ervaringswetenschappen komen de wonderlijkste misvattingen

voor. Beschouwen we b.v. de definitie van het soortelijk gewicht, of, beter gezegd, de massadichtheid van een stof. De fysicus zal zeggen dat deze de verhouding is van de massa en het volume van een kleine hoeveelheid dezer substantie. De mathematicus echter zal wellicht bezwaren tegen deze definitie maken, zeggende dat daarmede niet de massadichtheid zèlf, die een functie van de plaats is, maar haar volumeintegraal, dus de *gemiddelde* massadichtheid over een eindig volume gedefinieerd is. Volgens hem wordt de correcte definitie verkregen door de *limiet* van de genoemde verhouding te nemen voor een zich op een punt samentrekkend volume. Deze definitie is evenwel niet beter, maar slechter dan de eerst genoemde, namelijk totaal fout. Immers, afgezien nog van de vraag, of deze limiet bestaat, zal men in ieder geval kunnen zeggen, dat men niet slechts totaal verschillende waarden zal krijgen, al naar gelang het beschouwde punt zich bevindt in een atoomkern of in een electron, of in de „lege ruimte" daartussen, maar dat zij in *ieder* geval in het geheel *niets* te maken heeft met b.v. het s.g. van water, waarover men wil spreken.

Weliswaar is mij niet bekend dat een dergelijk dispuut tussen een fysikus en mathematikus over de massadichtheid werkelijk heeft plaats gevonden, maar wèl is iets dergelijks het geval geweest ten aanzien van analoge begrippen, b.v. het snelheidsbegrip. Hier is het sinds een kwarteeuw de mode, de zogenaamde verwarring van „snelheid op een bepaald tijdstip" en „gemiddelde snelheid gedurende een tijdsinterval" onherroepelijk af te keuren en slechts de zogenaamd exacte definitie van de snelheid als *limiet* van de gemiddelde snelheid te aanvaarden. Wanneer we echter nagaan, wat de uitdrukking „snelheid van een stoffelijk punt op een bepaald tijdstip" kan betekenen, dan moeten we allereerst opmerken, dat een „stoffelijk punt" empirisch alleen gedefinieerd kan worden als een lichaam waarvan de afmetingen verwaarloosd worden. Soms kan een electron, soms een kanonskogel, soms een planeet, soms een melkwegstelsel als een stoffelijk punt behandeld worden, al naar de voor het gestelde doel vereiste nauwkeurigheid. Voorts kan „een bepaald tijdstip" alleen een klein tijdsinterval betekenen, waarvan de grootte verwaarloosd wordt. De „snelheid" van het „stoffelijk punt" „op" dit „tijdstip" kan dan niet anders zijn dan de ongevere waarde van het quotiënt van de ongevere waarde der in dit intervalletje afgelegde weg tot de ongevere waarde van de daartoe benodigde tijd, waarbij de term „ongeveer" in de verschillende gevallen nog een precisering in de zin ener quantitatieve schatting toelaat.

Dit betoog houdt natuurlijk niet in, dat men dus het gebruik van differentiaalrekening in de mechanika zou dienen te vermijden. Immers het is duidelijk, dat de precisering der onbepaaldheidsintervallen een wèrkelijk gebruik van deze definitie praktisch onmogelijk zouden maken in alle gevallen die een uitsluitend numerieke behandeling der beschouwde problemen te boven gaan.

Men heeft dus vrijwel geen andere keus, dan toch maar „tot de limiet over te gaan'' (t.w. tot een der oneindig vele waarden voor deze limiet die niet met de gegevens in strijd zijn) en ook overigens de infinitesimaalrekening toe te passen. Dáár is niets tegen. Wèl echter tegen de waan dat men door zo te handelen *exacter* zou werken dan wanneer men zich aan kleine (natuurlijk niet: „oneindig kleine'') differenties en haar eindige sommen houdt, terwijl men in werkelijkheid eerder zou moeten zeggen, dat men „slordiger'' werkt, doordat men een aantal kleine eindige grootheden verwaarloost. Ook logisch bezien zal men bezwaarlijk kunnen volhouden, dat als onaanvechtbaar voorgestelde schijnexactheid logisch bevredigender is dan als zodanig onderkende beperkte exactheid.

Ook andere oneindigheidsuitspraken, die minder bij het middelbaar dan bij het hoger onderwijs voorkomen, berusten op een soortgelijke modeloverschatting. Bij voorbeeld de uitspraak, dat een stoffelijk punt een bepaalde positie, b.v. een van labiel evenwicht slechts „na oneindig lange tijd'' bereikt. Deze uitspraak geldt slechts in het model; in werkelijkheid wordt het evenwicht reeds na een eindige tijd bereikt — of niet! Ook hier drukt men dit soms uit door te zeggen, dat de empirische werkelijkheid onvolkomenheden bevat, waarvan de mathematische theorie vrij is. Het in het woord „onvolkomen'' gelegen emotionele accent verleggende, zou ik liever willen zeggen, dat de *theorie* zulke onvolkomenheden bevat, met name dat het model *te* sterk vereenvoudigd is om het bestudeerde verschijnsel correct weer te geven. Trouwens het gehele begrip „labiel evenwicht'' berust op een te zeer vereenvoudigd model. Bij het allerlabielste in werkelijkheid voorkomend evenwicht (dat overigens, precieser beschouwd nooit statisch, maar altijd dynamisch is) is nog wel een epsilonnetje te vinden, waarbeneden een verstorinkje zich herstelt!

5. De bovenstaande kritiek is niet bedoeld, om het gebruik van mathematische modellen te ontraden. De in het begin als een keten van 12 schakels geschetste procedure der ervaringswetenschappen kan uiteraard de schakel van het wiskundige model niet missen. Het is echter wel belangrijk te wijzen op de gevaren van over-

schatting van het mathematische model. Het is zinloos één van de twaalf schakels tot een veel grotere exactheid op te voeren dan de overige. De exactheid van het geheel neemt daardoor niet noemenswaardig toe en de logische structuur wordt erdoor aangetast. Een der gevolgen van modeloverschatting is vaak een verstarring van de denkmethode, die zich ook in het onderwijs doet gevoelen in de vorm van een gebrek aan aanpassing aan nieuwe ontwikkelingen, vooral voorzover deze buiten het model optreden. Zonder op details in te gaan, zij hier gewezen op de wenselijkheid van een grondige herziening in de vorm van een verbreding enerzijds en een beknotting anderzijds van het middelbaar onderwijs in zuivere en toegepaste wiskunde. Verschillende gedeelten van de nu onderwezen stof zouden zonder schade voor de verdere studie weggelaten kunnen worden, waardoor ruimte zou ontstaan voor het behandelen van nieuwe onderwerpen. Het zou b.v. wenselijk zijn niet meer de mechanica als het enige onderwerp van toegepaste wiskunde te onderwijzen, maar daarnaast ook vakken als statistiek en numerieke wiskunde in te voeren, waarbij de mogelijkheid van een facultatieve keuze uit deze toepassingsgebieden overwogen zou kunnen worden.

6. Resumerend en aanvullend zou ik tenslotte willen vaststellen, dat het Mechanika Onderwijs niet alleen — evenals het Wiskunde Onderwijs en eveneens ten dele onder de pressie van het alle redelijk onderwijs in de kiem smorend eindexamen — ontaard is in een massaproductie van „sommen", die noch met de werkelijkheid, noch met de wetenschap nog enig verband houden, maar bovendien door absolutering van een sterk vereenvoudigd mathematisch model een fundamenteel onjuist beeld geeft aan de wijze waarop wiskunde op ervaringswetenschappen wordt toegepast, een complex van foutieve beweringen poneert en dit achter schijnexactheid maskeert, en daarmede de tot zijn doelstelling behorende „bevordering van het logisch denken" in haar tegendeel doet verkeren.

IN MEMORIAM

Dr G. F. C. Griss

Verslagenheid treft ons voortdurend bij het besef, dat Griss voorgoed is heengegaan en slechts met aarzeling kan men beginnen over hem te spreken, want men voelt het als een aanmatiging. Tegelijk echter geeft de herinnering aan hem weer moed, want hij zou dit gevoel dwaas vinden. Wie Griss goed gekend heeft, en dat zijn er gelukkig velen, mag zich gelukkig prijzen, want zijn leven is erdoor verrijkt. Zelfs in zijn langdurige, slopende ziekte bleef hij de actieve en inspirerende persoon, die hij daarvóór was. Met dankbaarheid herinner ik me de gesprekken, die ik nog op het laatst van zijn leven met hem mocht voeren; zijn gedachten waren nog vaak bij zijn werk, dat hij hoopte, eens weer te kunnen hervatten.

Zijn wiskundig werk is scherp gescheiden in twee delen: enerzijds zijn werk op het gebied van de invariantentheorie, een onderwerp dat in de twintiger en dertiger jaren in het brandpunt der belangstelling stond; anderzijds zijn werk op het gebied van de intuitionistische wiskunde, dat hijzelf hoger schatte dan het eerste.

Zijn onderzoekingen op invariantentheoretisch gebied [2] leverden inspiratie aan o.a. M. Euwe en waren van wezenlijk belang ([7], [9]) voor geometrische onderzoekingen van M. Pinl. In 1934 vond het werk van Griss formele erkenning door zijn toelating als privaatdocent in de invariantentheorie te Utrecht. Dit alles volbracht Griss naast zijn volledige taak aan het gymnasium, welke hij eveneens zeer bezield volbracht; hiervan getuigt o.a. zijn opbouw van de gehele exacte afdeling aan het lyceum te Doetinchem, een arbeid die hem veel tijd en energie kostte. Daarenboven waren zijn culturele belangstelling en zijn interesse voor de wijsbegeerte zeer groot. Door de gelukkige omstandigheid van zijn nimmer verstarde ontwikkeling op wiskundig gebied heeft hij verhelderend werk verricht in de wijsbegeerte en door zijn positieve, principiële en verantwoordelijke levenshouding werkte hij stimulerend op de werkzaamheid van ieder die met hem in aanraking kwam. Men behoeft zijn werkje „Idealistische Filosofie" maar op te slaan en men wordt wakker geschud en aan het denken gezet. Dit is met al zijn werk het geval: het werpt problemen op en activeert de lezer tot eigen onderzoek.

Zijn filosofische inzichten leidden hem tot het verwerpen van de

negatie bij de beoefening van de intuitionistische wiskunde [10]; vergelijk hiermede werk van D. van Dantzig[1]). Op dit onderwerp legde hij zich met veel ijver en enthousiasme toe; herhaaldelijk heeft hij in filosofische geschriften zijn overtuiging verduidelijkt (b.v. [11], [13], [14], [16]).

Doordat L. E. J. Brouwer en A. Heyting op het belang van zijn principiële onderzoekingen de aandacht vestigden, werd hij in 1949 door vermindering van zijn taak aan het Coornhertgymnasium te Gouda in staat gesteld, zijn studies intensiever aan te pakken. In die periode heeft ook mej. N. Dequoy[2]) gelegenheid gehad onder zijn leiding in Gouda haar dissertatie voor te bereiden.

Al dadelijk trachtte Griss een aan de negatieloze wiskunde geadapteerde formele logica op te bouwen, daar het systeem van A. Heyting[3]) hierop niet van toepassing bleek, doch zijn onderzoekingen daarover stelden hem niet tevreden. Nadat enige voorbarige en oppervlakkige publicaties van anderen hierover verschenen waren, besloot hij zijn eigen onvolledige werk hierover te publiceren teneinde het onderzoek te stimuleren. Deze poging heeft zijn uitwerking niet gemist: dit jaar heeft P. C. Gilmore[4]) een dissertatie voltooid (eigenlijk gebaseerd op een misvatting van Griss' bedoelingen), waarin een belangrijke bijdrage geleverd werd, die het arbeidsterrein echter geenszins heeft uitgeput. Het is zeker dat de stimulerende invloed, die van het werk van Griss uitgaat hiermede niet is uitgewerkt.

Zijn verlangen naar verdere ontwikkeling bleef tot het laatst: nadat hij niet meer in staat was zijn vak te beoefenen, zette hij zich met veel wilskracht aan de studie van het Sanskriet teneinde een lang gekoesterde wens: de lectuur van de Upanishads, in vervulling te doen gaan. In korte tijd maakte hij grote vorderingen — het was hem evenwel niet meer vergund zijn doel geheel te bereiken. Ondanks deze tegenslagen behield hij zijn zielsrust en was hij met zijn heengaan verzoend. Velen zullen hem als wiskundige en vooral ook als waarachtig vriend missen.

[1]) Zie hiervoor: D. van Dantzig: On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics. Proc. K.A.W. (Amsterdam), **50** (1947), 918—929 en 1092—1103.

[2]) N. Dequoy: Axiomatique intuitioniste sans négation de la géométrie projective. (1952).

[3]) A. Heyting: Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. Sitz. Ber. Pr. Ak. Berlin (1930).

[4]) P. C. Gilmore: The effects of Griss' criticism of the intuitionistic logic on deductive theories formalized within the intuitionistic logic. Amsterdam (1953), ook Proc. K.A.W. (Amsterdam) **56** (1953).

PUBLICATIES G. F. C. GRISS

1 Het volledige invariantensysteem van 2 covariante antisymmetrische tensoren van den 2den trap en een willekeurig aantal vectoren, K.A.W. Amsterdam, Versl. **34** (1925).

2 Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren (diss.), Noordhoff Groningen (1925).

3 Differentialinvarianten von zwei kovarianten Vektoren in vier Veränderlichen, Proc. K.A.W. (Amsterdam), **33** (1930), 176—179.

4 Der Existenzsatz für ein wesentliches System bei Invarianten von Differentialformen, Proc. K.A.W. (Amsterdam), **33** (1930), 491—494.

5 Problemen der Invariantentheorie (openbare les), Noordhoff Groningen (1934).

6 Die Differentialinvarianten eines Systems von n relativen kovarianten Vektoren in R_n, Proc. K.A.W. (Amsterdam), **37** (1934), 82—87.

7 Die Differentialinvarianten eines kovarianten symmetrischen Tensors vierter Stufe im binären Gebiet, Comp. Math. **1** (1934), 238—247.

8 Differentialinvarianten von relativen Vektoren, Comp. Math. **1** (1935), 420—428.

9 Die konformen Differentialinvarianten eines kovarianten symmetrischen Tensors vierter Stufe im binären Gebiet, Proc. K.A.W. (Amsterdam), **39** (1936), 947—955.

10 Negatieloze intuitionistische wiskunde, Ned. A. W. Versl. **53** (1944), 261—268.

11 Idealistische Filosofie, van Loghum Slaterus, Arnhem (1946).

12 Negationless intuitionistic Mathematics I, Proc. K.A.W. (Amsterdam) **49** (1946), 1127—1133.

13 Over de Negatie, Feestbundel Prof. Dr. H. J. Pos, Noord-Holl. Uitg. Mij, Amsterdam (1948), 96—106.

14 Mathématiques, Mystique et Philosophie, Mélanges philosophiques, Libr. 10th Int. Congr. Phil. II (1948), 156—175.

15 Logique des mathématiques intuitionistes sans négation, C. R. Ac. Sci. Paris, **227** (1948), 946—948.

16 Sur la Négation dans les Mathématiques et la Logique, Synthese **7** (1948), 71—74.

17 Negationless intuitionistic Mathematics II, Proc. K.A.W. (Amsterdam), **53** (1950), 456—463.
18 Logic of negationless intuitionistic Mathematics, Proc. K.A.W. (Amsterdam), **54** (1951), 41—49.
19 Negationless intuitionistic Mathematics III, Proc. K.A.W. (Amsterdam), **54** (1951), 193—199.
20 Negationless intuitionistic Mathematics IV, Proc. K.A.W. (Amsterdam), **54** (1951), 452—471.

B. VAN ROOTSELAAR

LIWENAGEL

De penningmeester van Liwenagel verzoekt hun, die door middel van deze vereniging abonné van Euclides zijn, hun abonnementsgeld te willen voldoen door storting van *f* 3.— op giro 87185 ten name van de penningmeester van Liwenagel, Arnhem.

VACANTIECURSUS 1953

De Raad van Beheer van het Mathematisch Centrum maakt bekend, dat in overleg met de Vereniging van Leraren in de Natuur- en Scheikunde — die in Augustus 1953 een cursus in Leiden organiseerde — door de Commissie voor de Vacantiecursus vanwege het Mathematisch Centrum is besloten de Vacantiecursus dit jaar niet te houden in Augustus doch in de herfstvacantie, welke vrij uniform de eerste dagen van November zal omvatten.

Nadere gegevens omtrent datum, plaats, sprekers en onderwerpen zullen nog volgen.

Administratie Mathematisch Centrum.

AFSCHRIFT VAN EEN BRIEF

door Wimecos in verband met het eindexamenwerk voor Mechanica aan de Inspectie van het V.H.M.O. gezonden

Aan het College
van Inspecteurs V.H.M.O.
Fuutlaan 10
Den Haag

Rotterdam, 8 Juni 1953

Hoogedelgestrenge Heren,

De onrust, die veroorzaakt is door het feit, dat de prestaties voor Mechanica van het schriftelijk eindexamen van de H.B.S.-B in 1953 op vele scholen beneden redelijke verwachtingen zijn gebleven, is voor het Bestuur van Wimecos aanleiding geweest om op Maandag 8 Juni in spoedvergadering te Utrecht bijeen te komen.

Ook de omzendbrief van dr J. N. van den Ende te Den Haag is op deze vergadering ter sprake gebracht. Zonder de inhoud van deze brief voor zijn rekening te willen nemen (van enkele generaliserende conclusies wenst het Bestuur zich uitdrukkelijk te distanciëren), is het Bestuur van Wimecos van mening, dat het aanbeveling verdient, dat de Inspectie bevordert, dat door een eventueel groter gewicht toekennen aan het straks af te nemen mondeling examen de nadelige gevolgen, die een enkele aperte fout en enige vaagheden in de opgaven voor een deel der candidaten dreigen te hebben, althans achteraf gedeeltelijk zullen kunnen worden gecompenseerd.

Het Bestuur van Wimecos ontveinst zich niet, dat hiermee slechts een noodoplossing wordt bereikt. Beter zou het zijn, als een geheel nieuw schriftelijk eindexamen in de Mechanica zou kunnen worden afgenomen, doch dit is om practische redenen thans niet meer mogelijk.

Toch stelt het Bestuur van Wimecos er prijs op te verklaren, dat blijkens het type van de dit jaar opgegeven vraagstukken inzicht in de Mechanica op hogere prijs blijkt te worden gesteld dan ingewikkelde techniek. Evenzo waardeert het Bestuur, dat er dit jaar 3 i.p.v. 2½ uur beschikbaar zijn gesteld voor het schriftelijk examen. De voordelen, die deze tijdsverruiming voor de candidaten beloofde te hebben, zijn echter teniet gedaan door de onvolkomenheden der opgaven.

Wat deze onvolkomenheden betreft, beperkt het Bestuur zich tot het opnoemen van de volgende:

a. in opgave 1 ontbreekt een gegeven omtrent de stand van de as;
b. in opgave 3 zouden de candidaten ten zeerste gebaat zijn geweest, indien de uitdrukking: „waarvan de drager (of werklijn) in V *ligt*" door een didactisch betere uitdrukking was vervangen;
c. in opgave 4 geeft de vage uitdrukking: „Op een ruw hellend vlak . . . *bevindt* zich een stoffelijk punt" de candidaten niet aan wat voor toestand van rust of beweging het stoffelijk punt heeft, waardoor deze candidaten ongewenste moeilijkheden ontmoeten.

Tenslotte merkt het Bestuur op, dat ondanks het feit, dat elk der 4 opgaven op zichzelf bij een goede redactie aanvaardbaar c.q. goed te noemen is, het stel in zijn geheel te zwaar is uitgevallen, doordat een eenvoudig routine-vraagstuk, dat in een schooleindexamen thuis hoort, ontbreekt.

Hoogachtend
w.g. Ir J. J. Tekelenburg
secretaris Wimecos.

WISKUNDIG-WIJSGERIGE BESPIEGELING

In een rechthoekige driehoek met de rechthoekszijden a en b en de hypothenusa c geldt: $c^2 = a^2 + b^2$ ($a^2 = c^2 - b^2$; $b^2 = c^2 - a^2$). Dit wil zeggen, dat iedere zijde op een bepaalde wijze uitdrukbaar is in de beide andere zijden. Wanneer twee verzamelingen in elkaar kunnen worden uitgedrukt, wijst dat op een structuurverwantschap van die verzamelingen (homeostructuraliteit of in het ideale geval isostructuraliteit).

In ons geval heeft deze homeostructuraliteit dit bijzondere aan zich, dat de uitdrukkingsrelatie intrastructureel functioneert en niet interstructureel. De in elkaar uitdrukbare verzamelingen liggen in ons geval niet buiten elkaar maar zijn met elkaar verweven (verzamelingen-enkapsis). Een intrastructurele uitdrukkingsrelatie vindt zijn grond in het feit, dat de in elkaar uitgedrukte verzamelingen functioneren in en participeren aan een geheel dat ze zelf constitueren. Op grond van het functioneren in het geheel, het participeren aan het geheel en het constitueren van het geheel, functioneren de verzamelingen in elkaar, participeren ze aan elkaar en constitueren ze elkaar. Er heeft functioneel (dus niet substan-

tieel) een wederzijdse doordringing plaats. De homeostructuraliteitsfactor, welke de wederzijdse uitdrukbaarheid mogelijk maakt, is in ons geval gelegen in de verwantschap van het samen-rechthoekige-driehoek-zijn. De speciale vorm waarin hier de homeostructuraliteitsfactor optreedt wordt uitgedrukt (en wel interstructureel) door de reeds geciteerde wiskundige formules.

Wanneer we een en ander nu in een meer wijsgerig-dialectische vorm uitdrukken dan krijgen we het volgende: de hypothenusa is de rechthoekszijden op de wijze van de hypothenusa en de rechthoekszijden zijn de hypothenusa op de wijze van de rechthoekszijden. Dit vindt zijn grond in het feit dat de hypothenusa de rechthoekige driehoek is op de wijze van de hypothenusa en dat de rechthoekszijden de rechthoekige driehoek zijn op de wijze van de rechthoekszijden. Het als deel op eigen wijze het geheel zijn, is de grond voor het als deel een ander deel zijn op de wijze van het zichzelf zijn [1]). Dit alles natuurlijk in functionele en niet in substantiële zin te verstaan.

Intrastructurele homeostructuraliteitsrelaties treden in de meetkunde allerwege op (in alle driehoeken b.v.), ze zijn echter niet steeds wiskundig formuleerbaar (uitdrukbaar). In iedere meetkundige figuur geldt voor iedere deelverzameling (van de figuur als verzamelingen-enkapsis) dat deze functioneel afhankelijk is van alle andere en tegelijk geldt de omgekeerde betrekking. Het gevolg is dat functioneel gezien de delen van het geheel niet meer scherp aanwijsbaar zijn. De innerlijke (intrinsieke) structuur van een figuur kan of met het oog worden geschouwd en zo worden ondergaan of het functieverband kan wiskundig worden geformuleerd.

Het schouwen en ondergaan van figuren is de taak van aesthetiek en mystiek, het wiskundig formuleren van figuren is de taak der meetkunde. Meetkunde, aesthetiek en mystiek putten alle drie uit de mogelijkheden die er schuilen in de eigenschappen der intrastructurele verhoudingen. Alle drie streven naar eenheid, respectievelijk naar de eenheid als het overzichtelijke, de eenheid als het schone en de eenheid als het verlossende.

Het is de taak en het streven der wijsbegeerte alle drie de mogelijkheden te verstaan en te eerbiedigen vanuit de eenheid des begrips.

Dr H. A. C. ROEM

---

1) Cf. G. M. de Gelder, Wijsgerige Studiën, 1950, p. 86: „. . . omdat het een in aanleg of potentieel het ander is en daarmee dus wezenlijk het geheel — zij het op de wijze van het een of op de wijze van het ander — is".